

MAGNETIZAM

Branislav Jajac i Nedjeljka Grulović

MAGNETIZAM

SVEZAK 2a

Zbirka riješenih zadataka iz osnova elektrotehnike

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U SPLITU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM SPALATENTIS



Nakladnik
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Urednik
Prof. dr. sc. Vladan Papić

Autori
Prof. dr. sc. Branislav Jajac i doc. dr. sc. Nedjeljka Grulović

Recenzenti
prof. dr. sc. Sead Berberović, FER Zagreb
doc. dr. sc. Dino Lovrić, FESB Split

Lektor/ica
Drinka Bedalov, prof.

Crteži
Ivanko Jajac

Tehnička obrada
Mile Grulović, dipl. ing.

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Splitu, rješenjem KL 602-09/21-04/10; ur. br. 2181-202-3-07-22-12 od 25. svibnja 2022. god.



Ovo je djelo licencirano pod međunarodnom licencom CC BY-NC-ND 4.0 koja dopušta preuzimanje djela i dijeljenje s drugima, pod uvjetom da se navedu autori, te da se djelo ne smije mijenjati ili koristiti u komercijalne svrhe.

Autori i nakladnik ove knjige uložili su sve napore u njenoj pripremi sa željom da prenesu točne i mjerodavne informacije vezane s temom knjige. Autori i izdavač ni u kojem slučaju ne odgovaraju za slučajne ili posljedične štete povezane s izvedbom ili primjenom postupaka koji se u knjizi opisuju.

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U SPLITU
MANUALIA UNIVERSITATISSTUDIORUM SPALATENTIS

**ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA
IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE**

Svezak 2a
MAGNETIZAM

Prof. dr. sc. Branislav Jajac i doc. dr. sc. Nedjeljka Grulović

Split, 2022.

Našim prijateljima

Ne odgađaj za sutra ono što
možeš napraviti danas.

narodna poslovice

Sadržaj

PREDGOVOR

14. MAGNETSKO POLJE, VELIČINE POLJA	1
14.1. Magnetska indukcija.....	1
14.2. Magnetski tok, jakost magnetskog polja	2
15. OSNOVNI ZAKONI MAGNETSKOG POLJA	17
15.1. Ampereov zakon (zakon protjecanja).....	17
15.2. Biot-Savartov zakon	32
16. SILA I RAD NA VODIČ KOJIM TEČE STRUJA U MAGNETSKOM POLJU	57
17. ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA	91
17.1. Faradejev zakon indukcije, Lenzov zakon	91
17.2. Samoindukcija, koeficijent samoindukcije.....	127
17.3. Međusobna indukcija, koeficijent međuindukcije.....	143
18. MATERIJALI U MAGNETSKOM POLJU	157
18.1. Vektor magnetiziranja i Opći oblik Ampereovog zakona	157
18.2. Uvjeti na granici	170
18.3. Krivulja magnetiziranja	179
19. PRORAČUN MAGNETSKOG KRUGA	195
19.1. Ohmov zakon za magnetski krug	195
19.2. Prvi i drugi Kirchhoffov zakon.....	196
20. ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA	209
20.1. Magnetska energija izražena veličinom polja	209
20.2. Magnetska energija dvaju ili više svitaka.....	210
LITERATURA	231

PREDGOVOR

Udžbenik „Zbirka riješenih zadataka iz osnova elektrotehnike” treći je u nizu od tri sveska koji će biti dostupni studentima prve godine na studiju Elektrotehnike i informacijske tehnologije Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Sveučilišta u Splitu. Nadamo se da će ovaj udžbenik koristiti i studenti ostalih sveučilišta u Hrvatskoj na kojima se izučavaju osnove elektrotehnike. Predmet ovog trećeg sveska primjeri su iz MAGNETIZMA i predstavljaju dio ispitnih zadataka na ovom kolegiju. Riješeni primjeri oslanjaju se na teoriju koja je detaljno razložena u referentnom udžbeniku (Teorijske osnove elektrotehnike, Svezak II, autor prof. dr. sc. Branislav Jajac). S pravom se postavlja pitanje zašto RIJEŠENI primjeri. Razlog je u promjeni načina studiranja. Prije “bolonje” studenti su zaista studirali, a poslije nje studiranje se pretvorilo u učenje na mah u kojem studenti nemaju vremena posvetiti se studiranju koje mi poznajemo. Mišljenja smo da će im zbirka riješenih zadataka olakšati ovakav način studiranja.

Zahvaljujemo se recenzentima na uloženom trudu.

Split, rujan 2022.

Autori

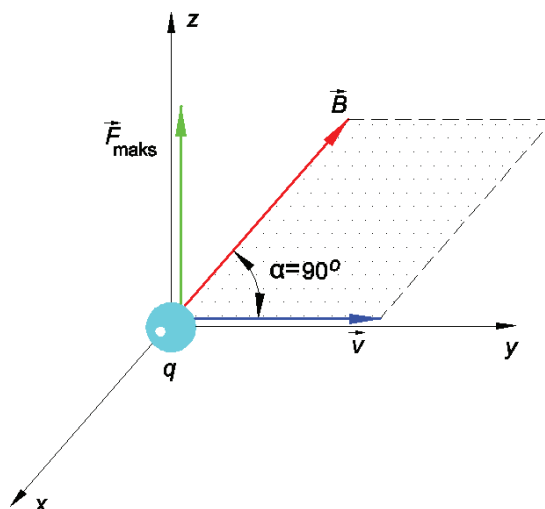
14. MAGNETSKO POLJE, VELIČINE POLJA

Dva osnovna učinka magnetskog polja jesu:

- sila na naboj u gibanju
- elektromagnetska indukcija.

14.1. Magnetska indukcija

Ako postoji sila F na naboj q koji se giba brzinom v , slika 14.1, a da pritom ne postoji ni elektrostatička sila F_e ni vanjska sila F_v , tada postoji magnetsko polje.



Sl.14.1. Sila na pozitivni naboj u gibanju u magnetskom polju ($\alpha=90^\circ$)

Magnetsko polje opisuje se vektorom magnetske indukcije i označava se velikim slovom \vec{B} .

Iznos vektora magnetske indukcije, prema (21.1)*, jest:

$$B = \frac{F_{\text{maks}}}{qv} \quad \left(\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T} \right) \quad (14.1)$$

gdje je:

F_{maks} - maksimalna (magnetska) sila na naboj u gibanju (N),

q - naboj u gibanju (As),

v - brzina naboja (m/s).

Ako se naboj q giba brzinom \vec{v} u magnetskom polju indukcije \vec{B} , tada na njega, prema (23.2), djeluje sila:

* Broj jednadžbe u udžbeniku II. Sveska.

$$\vec{F}_m = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (14.2)$$

gdje je:

\vec{F}_m - magnetska sila na naboju u gibanju (N).

Iznos sile na naboj u gibanju jest:

$$F_m = q v B \sin \alpha \quad (14.3)$$

14.2. Magnetski tok, jakost magnetskog polja

Magnetski tok, kao i svaki drugi tok, definiran je skalarnim umnoškom vektora magnetske indukcije \vec{B} i površine \vec{S} koju taj vektor prožima. Prema (21.5) jest:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (14.4)$$

gdje je:

ϕ - magnetski tok (Vs).

Ako vektori \vec{B} i \vec{S} međusobno zatvaraju kut α , a uz to su prostorno nepromjenjivi (konstantni), tada je, prema (14.4)** , tok:

$$\phi = B S \cos \alpha \quad (14.5)$$

Posebno ako su vektori \vec{B} i \vec{S} međusobno kolinearni i prostorno nepromjenjivi, magnetski tok, prema (14.5) jest:

$$\phi = B S \quad (14.6)$$

Jakost magnetskog polja, prema (21.11), jest:

$$H = \frac{IN}{l} \quad \left(\frac{A}{m}\right) \quad (14.7)$$

gdje je:

H - jakost magnetskog polja (A/m),

I - jakost električne struje (A),

N - broj zavoja kojima teče struja I ,

l - dužina linije magnetskog polja (m).

** Broj jednačbe u zbirci zadataka.

Napomena: Gornji izraz vrijedi u slučaju kada je magnetsko polje konstantno i usmjereno duž linije l koja obuhvaća N zavoja protjecanih strujom I . Detaljnije objašnjenje je dato u II. Svesku, potpoglavlje 21.3.

Jakost magnetskog polja jest potreban broj amper-zavoja po jedinici duljine za stvaranje određenog magnetskog polja.

Ako sredinu karakterizira magnetska značajka materijala μ_0 , tada između magnetske indukcije \vec{B} i jakosti magnetskog polja \vec{H} postoji proporcionalnost i, prema (21.10), jest:

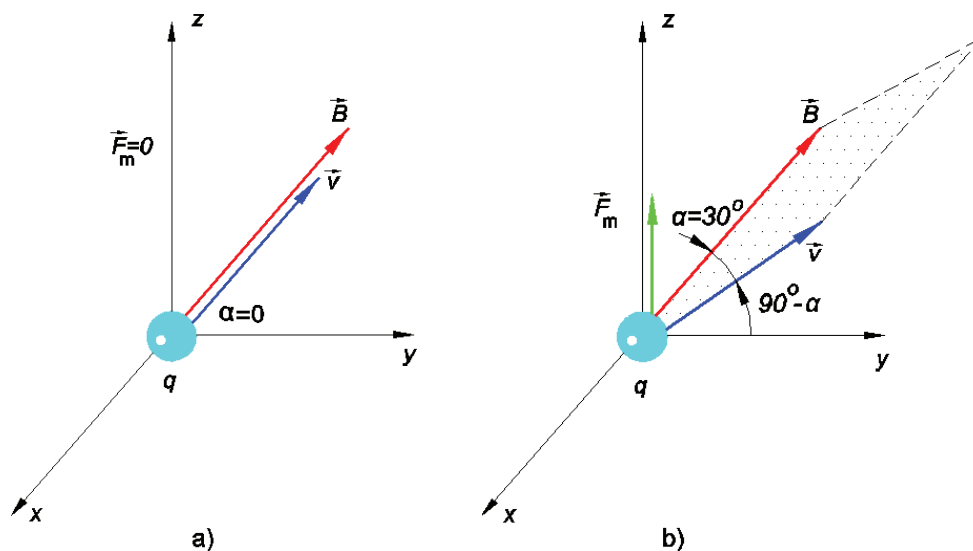
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (14.8)$$

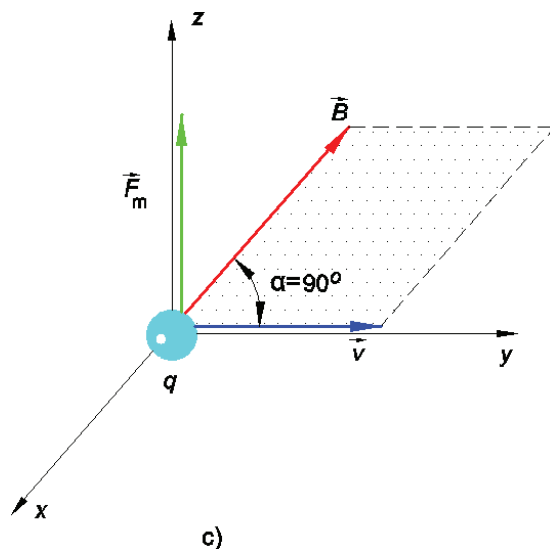
Primjer 14.1.

Naboj q giba se u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} brzinom \vec{v} . Odredite silu \vec{F}_m na naboj u gibanju ako je kut između vektora brzine \vec{v} i indukcije \vec{B} : $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$.

Podatci: $q = 2 \mu\text{As}$, $B = 0,6\text{T}$, $v = 200\text{km/s}$.

Rješenje Na slici 1 prikazani su međusobni položaji vektora brzine \vec{v} , vektora indukcije \vec{B} i sile \vec{F} .





Sl. 1. Međusobni položaji vektora \vec{v} , \vec{B} i \vec{F}_m . Vektori \vec{v} i \vec{B} leže u ravnini $z=0$

Sila na naboj u gibanju, prema (14.2), jest:

$$\vec{F}_m = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

iznosa:

$$F_m = qvB \sin \alpha \quad (2)$$

Vektor sile na naboj u gibanju okomit je na ravninu koju tvore vektori \vec{v} i \vec{B} i iznos mu je proporcionalan površini paralelograma ovih dvaju vektora, a smjer mu je određen pravilom desne ruke (prstima desne ruke zakrećemo vektor \vec{v} u \vec{B} , a palac određuje smjer \vec{F}).

Prema (2) za $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ sile na naboj u gibanju jesu:

$$F_{m0^\circ} = 0,0 \text{ N} \quad , \quad F_{m30^\circ} = 0,12 \text{ N} \quad , \quad F_{m90^\circ} = 0,24 \text{ N}$$

Iz dobijenih rezultata vidljivo je da je sila na naboj u gibanju jednaka nuli ako su vektori \vec{v} i \vec{B} međusobno kolinearni, a maksimalnog je iznosa ako su vektori \vec{v} i \vec{B} međusobno okomiti.

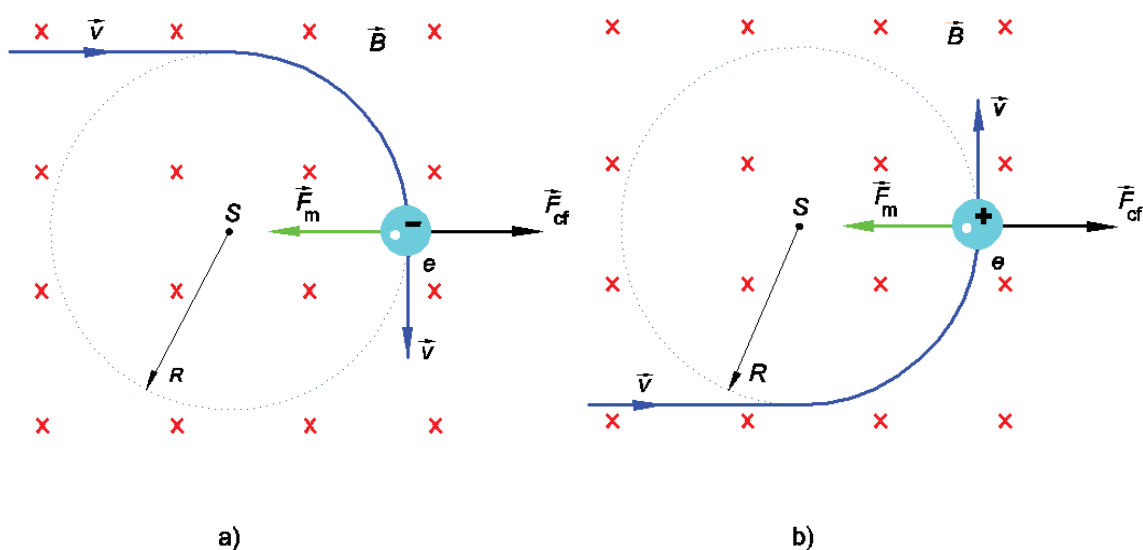


Primjer 14.2.

Elektron/pozitron mase m_e upada brzinom v pod pravim kutom u homogenu magnetsko polje indukcije B . Odredite silu na naboj u gibanju i radijuse putanja elektrona/pozitrona.

Podatci: $e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $v = 1000 \text{ km/s}$, $B = 0,8 \text{ T}$.

Rješenje Magnetska sila na naboj u gibanju ima karakter centripetalne sile (djeluje na smjer gibanja čestice, a ne na njezinu brzinu). Na slici 1 prikazan je smjer gibanja elektrona/pozitrona s radijusom zakrivljenja.



Sl. 1. Magnetska sila djeluje samo na smjer gibanja nabijene čestice dok brzina pri tome ostaje nepromijenjena

Budući da su vektori brzine \vec{v} i indukcije \vec{B} međusobno okomiti, $\alpha = 90^\circ$, sila na naboj u gibanju, prema (14.3), jest:

$$F_m = e v B \quad (= 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ N}) \quad (1)$$

Radijus putanje elektrona/pozitrona odredit će se iz jednakosti magnetske i centrifugalne sile:

$$F_m = F_{cf} \quad (2)$$

gdje je:

$$F_{cf} = m_e \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

centrifugalna sila.

Izjednačavanjem (1) i (3) dobije se:

$$R = \frac{m_e v}{e B} \quad (=7,108 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \quad (4)$$

Napomena:

Centripetalna sila jest sila koja prisiljava tijelo da se giba oko nekog središta.

Centrifugalna sila jest sila koja nastoji odbaciti tijelo od središta.

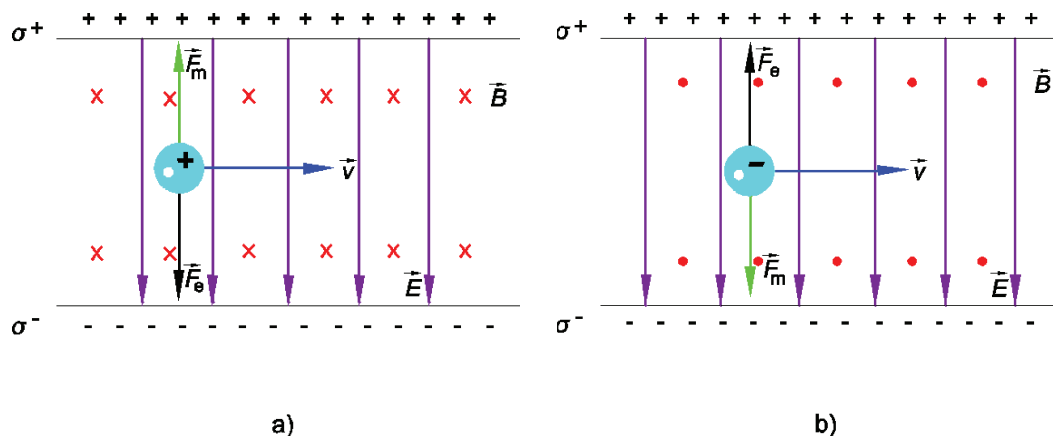


Primjer 14.3.

Naboj $\pm q$ mase m upada brzinom \vec{v} okomito na silnice homogenoga elektrostatičkog polja \vec{E} . Odredite vektor magnetske indukcije po iznosu i smjeru takav da se naboj nastavi gibati pravolinijski.

Podatci: $v = 100 \text{ km/s}$, $E = 0,35 \text{ kV/cm}$.

Rješenje Naboj će se nastaviti gibati pravolinijski samo ako su električna sila \vec{F}_e i magnetska sila \vec{F}_m jednake po iznosu i suprotne po smjeru. Na slikama 1a i 1b prikazan je smjer magnetske indukcije ako je naboj pozitivan odnosno negativan.



Sl. 1. Smjerovi sila \vec{F}_e i \vec{F}_m i indukcije \vec{B} ako je naboj pozitivnog a) i negativnog predznaka b)

Ako je naboj u gibanju pozitivan, $+q$, elektrostatička sila \vec{F}_e u smjeru je vektora polja \vec{E} . Da bi se naboj nastavio gibati pravolinijski, magnetska sila treba biti suprotna elektrostatičkoj, slika 1a. Ova će sila biti suprotna samo ako je vektor magnetske indukcije usmjeren u papir. Izjednačavanjem magnetske (14.3) i elektrostatske (5.4) sile dobije se:

$$q v B = q E \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$B = \frac{E}{v} \quad (= 0,35 \text{ T}) \quad (2)$$

Ako je naboj negativan, elektrostatička sila suprotna je vektoru jakosti električnog polja pa je smjer vektora magnetskog polja usmjeren iz papira, slika 1b.



Primjer 14.4.

Elektron mase m_e i naboja e upada brzinom \vec{v} pod pravim kutom u

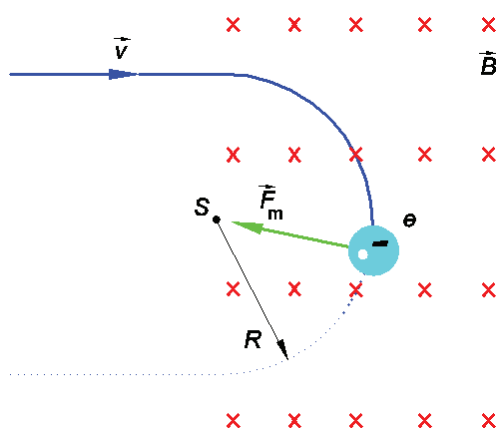
homogeno magnetsko polje indukcije \vec{B} . Odredite:

a) koliko duboko će elektron ući u magnetsko polje

b) potrebno vrijeme da elektron izađe iz magnetskog polja.

Podatci: $e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $v = 150 \text{ km/s}$, $B = 1,5 \text{ T}$.

Rješenje



Sl. 1. Magnetsko polje samo zakreće naboj u gibanju

Dubina prodiranja elektrona u homogeno magnetsko polje indukcije \vec{B} jednaka je radijusu zakrivljene putanje (kružnice). Magnetska sila na naboj u gibanju, prema (14.2), jest:

$$\vec{F}_m = e (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Budući da su vektori \vec{v} i \vec{B} međusobno okomiti, (1) postaje

$$|\vec{F}_m| = e v B \sin 90^\circ \quad (2)$$

Ova sila jednaka je centrifugalnoj sili:

$$|\vec{F}_m| = F_{cf} = m_e \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

Izjednačavanjem (2) i (3) dobije se dubina prodiranja elektrona u magnetsko polje:

$$R = \frac{m_e v}{eB} \quad (= 0,568 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \quad (4)$$

Budući da magnetsko polje naboja u gibanju ne mijenja brzinu gibanja, nego samo smjer gibanja, to je potrebno vrijeme da elektron izađe iz magnetskog polja:

$$t = \frac{s}{v} \quad (= 3,78 \cdot 10^{-12} \text{ s}) \quad (5)$$

gdje je:

$$s = \frac{2R\pi}{2} \quad (= 1,784 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \quad (6)$$

polovica opsega kružnice radijusa R .



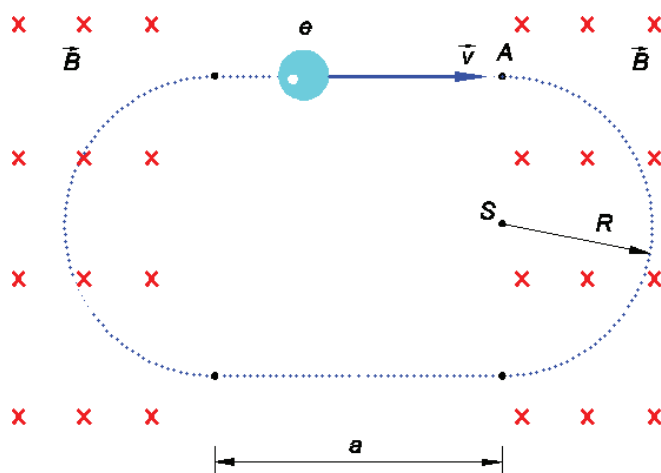
Primjer 14.5.

Elektron mase m_e i naboja e upada pod pravim kutom brzinom \vec{v} iz prostora omeđenog magnetskim poljima indukcije \vec{B} u jedno od dvaju polja, točka A , slika 1. Odredite:

- a) potrebno vrijeme da elektron stigne u polaznu točku
- b) minimalnu širinu magnetskog polja.

Podatci: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $v = 100 \text{ km/s}$, $B = 0,1 \text{ T}$,
 $a = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

Rješenje Na slici 1 prikazana su magnetska polja s međuprostorom i putanja elektrona.



Sl. 1. Putanja elektrona

a) Budući da magnetsko polje djeluje na naboj u gibanju tako da mu zakreće putanju, a ne mijenja brzinu, to je vrijeme potrebno za dolazak elektrona u početnu točku:

$$t = \frac{s}{v} \quad (1)$$

gdje je:

$$s = 2(a + R\pi) \quad (= 137,68 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \quad (2)$$

dužina puta zatvorene krivulje, slika 1,

$$R = \frac{m_e v}{e B} \quad (= 5,68 \cdot 10^{-6} \text{ m}) \quad (3)$$

radijus zakretanja naboja u magnetsko polje.

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobije se:

$$t = 137,68 \cdot 10^{-11} \text{ s} \quad (= 13,768 \text{ ps}) \quad (4)$$

b) Minimalna širina magnetskog polja jednaka je radijusu zakrivljenja R .



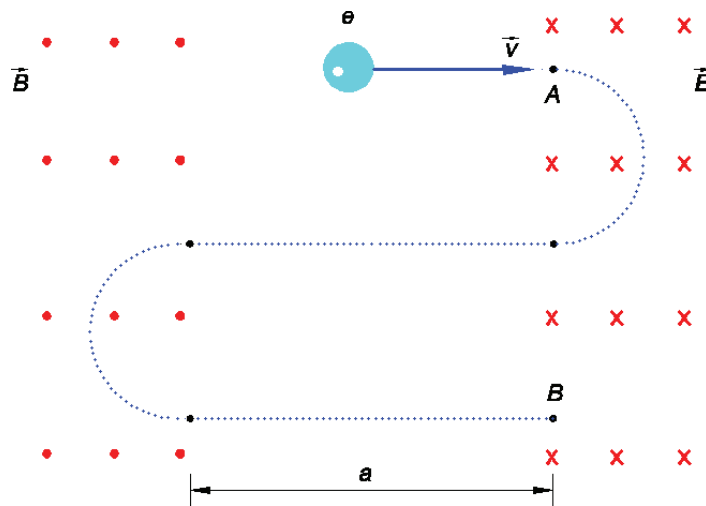
Primjer 14.6.

Ako se u prethodnom zadatku promijeni smjer indukcije \vec{B} u jednom od magnetskih polja, slika 1, odredite:

- potrebno vrijeme da elektron ponovo uđe u početno polje
- udaljenost ponovnog ulaska elektrona u magnetsko polje od početne točke A .

Podatci: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $v = 100 \text{ km/s}$, $B = 0,1 \text{ T}$,
 $a = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

Rješenje Na slici 1 prikazana su magnetska polja i putanja elektrona. Iz slike je vidljivo da elektron zbog promjene smjera polja mijenja smjer zakretanja te putanja dobija izgled obrnutog slova S.



Sl. 1. Promjenom smjera indukcije B u jednom od magnetskih polja došlo je do promjene putanje elektrona

a) Usporedbom putanje u zadatku 14.5 i 14.6 vidljivo je da je, bez obzira na izgled putanje, dužina putanje u oba slučaja jednaka, pa je samim tim i potrebno vrijeme za obilazak navedene putanje, $t = 13,768 \text{ ps}$.

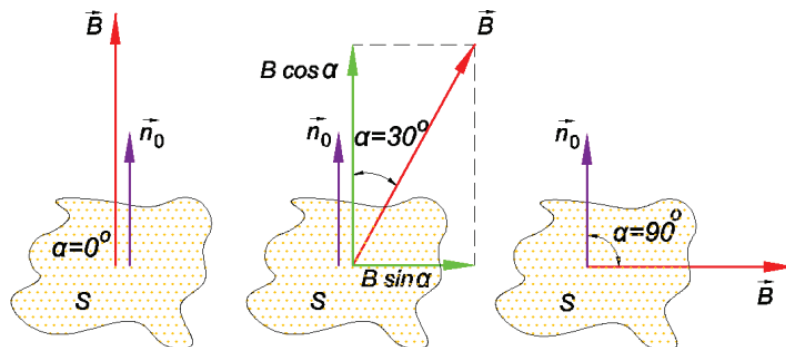
b) Udaljenost točaka A i B jednaka je četverostrukom radijusu zakrivljenja:
 $\overline{AB} = 4R = 22,72 \mu\text{m}$.



Primjer 14.7.

Odredite magnetski tok ϕ što ga načini vektor magnetske indukcije \vec{B} prožimajući plohu \vec{S} i to tako da vektori \vec{B} i \vec{n}_0 (jedinичni vektor plohe \vec{S}) zatvaraju međusobno kut: $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$.

Podatci: $B = 0,8\text{T}$, $S = 0,4\text{m}^2$.

Rješenje

Sl. 1. Vektori \vec{B} i \vec{n}_0 zatvaraju međusobno kut: $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$

Ako su vektori \vec{B} i \vec{n}_0 međusobno kolinearni, magnetski tok, prema (14.5), jest:

$$\phi = BS \quad (= 0,32 \text{ Vs}) \quad (1)$$

Ako vektori \vec{B} i \vec{n}_0 međusobno zatvaraju kut $\alpha = 30^\circ$, magnetski tok, prema (14.5), jest:

$$\phi = BS \cos 30^\circ \quad (= 0,277 \text{ Vs}) \quad (2)$$

Ako vektori \vec{B} i \vec{n}_0 međusobno zatvaraju kut od 90° , magnetski tok, prema (14.5), jest:

$$\phi = BS \cos 90^\circ \quad (= 0 \text{ Vs}) \quad (3)$$

Objasnite zašto je magnetski tok za $\alpha = 90^\circ$ jednak nuli.



Primjer 14.8.

Odredite magnetski tok ϕ kroz plohu površine $S = a \times b$ ako je magnetska indukcija okomita na površinu, a prostorna raspodjela indukcije B (po samo jednoj koordinati):

a) $B = B_0 (1 - 2x)$

b) $B = B_0 \sin \frac{\pi}{a} x$

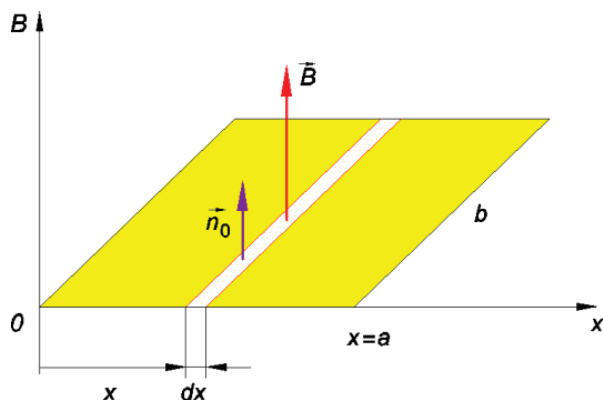
c) $B = B_0 \cos \frac{\pi}{a} x$.

Podatci: $B_0 = 0,85 \text{ T}$, $a = 0,4 \text{ m}$, $b = 0,8 \text{ m}$.

Rješenje Tok ϕ , prema (14.4), jest:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

Element površine, jer se indukcija mijenja samo po jednoj koordinati, prema slici 1, jest:



Sl. 1. Površinu $S = a \times b$ prožima indukcija B

$$d\vec{S} = dx b \vec{n}_0 \quad (2)$$

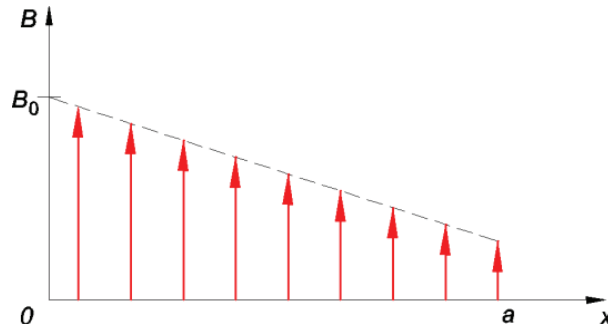
Vektor magnetske indukcije \vec{B} i normala \vec{n}_0 elementa površine međusobno su kolinearni, $\alpha = 0$. Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$\phi = \int_0^a B b dx \quad (3)$$

a) Prostorna raspodjela indukcije.

$$B = B_0 (1 - 2x) \quad (4)$$

prikazana je na slici 2.



Sl. 2. Prostorna raspodjela indukcije $B = B(x)$

Uvrštavanjem (4) u (3) dobije se:

$$\phi = \int_0^a B_0 (1 - 2x) b \, dx \quad (5)$$

Integriranjem dobije se:

$$\phi = B_0 (x - x^2) b \Big|_0^a \quad (6)$$

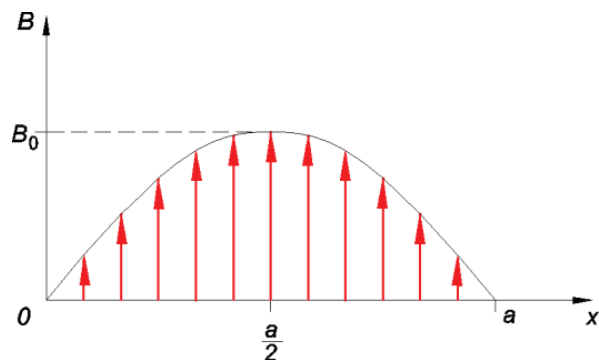
Uvrštavanjem granica dobije se:

$$\phi = B_0 ab(1 - a) \quad (= 0,16 \text{ Vs}) \quad (7)$$

b) Prostorna raspodjela indukcije:

$$B = B_0 \sin \frac{\pi}{a} x \quad (8)$$

prikazana je na slici 3.

Sl. 3. Prostorna raspodjela indukcije $B = B(x)$

Uvrštavanjem (8) u (3) dobije se:

$$\phi = \int_0^a B_0 \sin \frac{\pi}{a} x b dx \quad (9)$$

Integriranjem dobije se:

$$\phi = -B_0 b \frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi}{a} x \Big|_0^a \quad (10)$$

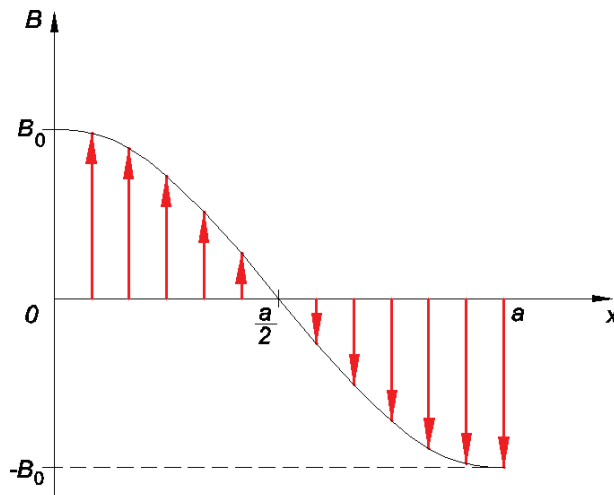
Uvrštavanjem granica dobije se:

$$\phi = -B_0 \frac{ab}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) \quad (= 0,17 \text{ Vs}) \quad (11)$$

c) Prostorna raspodjela indukcije jest:

$$B = B_0 \cos \frac{\pi}{a} x \quad (12)$$

prikazana je na slici 4.



Sl. 4. Prostorna raspodjela indukcije $B = B(x)$

Uvrštavanjem (12) u (3) dobije se:

$$\phi = \int_0^a B_0 \cos \frac{\pi}{a} x b dx \quad (13)$$

Integriranjem dobije se:

$$\phi = B_0 b \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x \Big|_0^a \quad (14)$$

Uvrštavanjem granica dobije se:

$$\phi = B_0 \frac{ab}{\pi} (\sin \pi - \sin 0) \quad (= 0 \text{ Vs}) \quad (15)$$

Rezultat je očekivan jer je raspodjela indukcije B u prvoj polovici površine pozitivna, a u drugoj je polovici površine ista takva negativna.



15. OSNOVNI ZAKONI MAGNETSKOG POLJA

15.1. Ampereov zakon (zakon protjecanja)

Linijski integral skalarnog umnoška vektora indukcije \vec{B} i elementa puta $d\vec{l}$ po zatvorenoj krivulji k jednak je umnošku zbroja struja koje prolaze kroz površinu omeđenu krivuljom k i permeabilnosti vakuma.

$$\oint_k \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{m=1}^n I_m \quad (15.1)$$

gdje je:

\vec{B} - vektor magnetske indukcije (T)

$d\vec{l}$ - element puta (m)

I - struja vodiča (A)

μ_0 - permeabilnost vakuma, iznosa $4\pi \cdot 10^{-7}$ (Vs/Am).

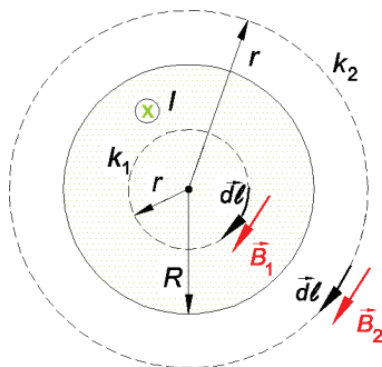
Ako je prostor karakteriziran magnetskom značajkom μ_0 , tada se (15.1) uz (21.10), $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, može pisati u obliku:

$$\oint_k \vec{H} d\vec{l} = \sum_{m=1}^n I_m \quad (15.2)$$

Primjer 15.1.1.

Struja jakosti I teče kroz ravni, beskonačno dugi vodič konačnog presjeka. Odredite jakost magnetskog polja u svim točkama prostora. Gustoća struje konstantnog je iznosa u svim točkama presjeka vodiča.

Rješenje Na slici 1 prikazan je presjek vodiča s ucrtanim krivuljama k (k_1 unutar vodiča i k_2 izvan vodiča). Krivulje k_1 i k_2 koncentrične su kružnice s ishodištem u osi vodiča.



Sl. 1. Poprečni presjek vodiča s ucrtanim krivuljama k_1 i k_2 te smjerom struje I

Polje se proračunava u dva dijela:

- polje unutar vodiča, $r \leq R$
- polje izvan vodiča, $r \geq R$

gdje je: R radijus vodiča kojim teče struja jakosti I .

Polje unutar vodiča. Polje u vodiču odredit će se upotrebom Ampereova zakona (15.1):

$$\oint_{k_1} \vec{B}_1 d\vec{l} = \mu_0 I^* \quad (1)$$

gdje je: I^* dio ukupne struje I obuhvaćene krivuljom k_1 .

Budući da su linije magnetskog polja indukcije \vec{B} koncentrične kružnice s osi u osi vodiča, odabire se element puta $d\vec{l}$ kolinearan s linijom polja u svakoj točki krivulja k , slika 1. Slijedi, skalarni umnožak dva vektora prelazi u algebarski umnožak. Jednadžba (1) poprima oblik:

$$\oint_{k_1} B_1 dl = \mu_0 I^* \quad (2)$$

Iznos indukcije jednak je u svakoj točki krivulje k_1 iz prostog razloga jer je bilo koja točka kružnice (po definiciji) jednako udaljena od središta, slijedi: indukcija kao konstanta može ići ispred integrala:

$$B_1 \oint_{k_1} d\vec{l} = \mu_0 I^* \quad (3)$$

gdje je:

$$I^* = JS^* \quad (4)$$

dio ukupne struje obuhvaćene krivuljom k_1 ,

$$J = \frac{I}{R^2 \pi} \quad (5)$$

gustoća struje (A/m^2),

$$S^* = r^2 \pi \quad (6)$$

dio ukupne površine presjeka vodiča obuhvaćenog krivuljom k_1 .

Jednadžba (4) postaje:

$$I^* = \frac{r^2}{R^2} I \quad (7)$$

Integriranje (3) po svim elementima $d\vec{l}$ kružnice k_1 radijusa r daje opseg kružnice: $2r\pi$. Jednadžba (3) postaje:

$$B_1 2r\pi = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \quad (8)$$

Tražena indukcija jest:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r \quad 0 < r \leq R \quad (9)$$

Polje izvan vodiča. Krivulja k_2 obuhvaća ukupnu struju vodiča pa jednadžba (15.1) poprima oblik:

$$\oint_{k_2} \vec{B}_2 d\vec{l} = \mu_0 I \quad (10)$$

Sva objašnjenja dana uz vektor indukcije \vec{B}_1 i element puta $d\vec{l}$ vrijede i za indukciju \vec{B}_2 i element puta $d\vec{l}$. Jednadžba (10), nakon integriranja, poprima oblik:

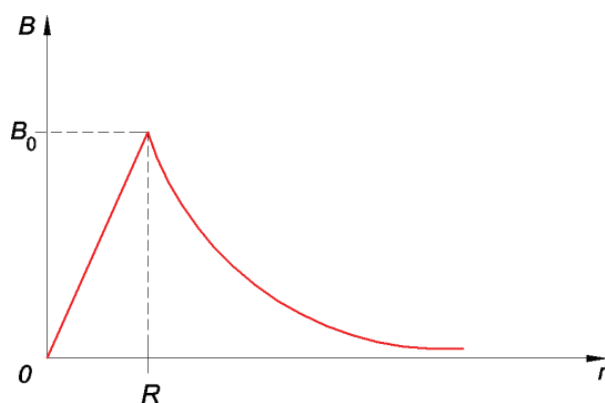
$$B_2 = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad R \leq r \leq \infty \quad (11)$$

za $r = R$ indukcija $B_2 = B_0$:

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \quad (12)$$

Zaključak:

Iz (9) i (11) slijedi: magnetska indukcija B unutar vodiča protjecanog strujom jakosti I proporcionalna je radiusu r dok izvan vodiča opada s prvom potencijom radijusa. Grafički prikaz polja dan je na slici 2.



Sl. 2. Promjena indukcije B u ovisnosti o radiusu r

Magnetska indukcija B za sve točke prostora koje su $\geq R$ računaju se kao da je struja jakosti I koncentrirana u osi vodiča kojim teče ta ista struja.

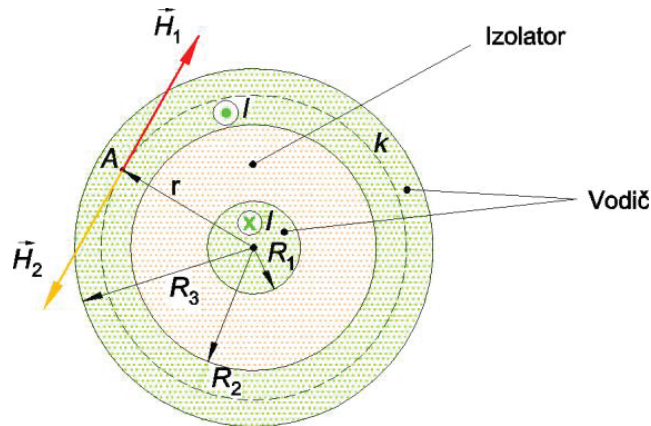


Primjer 15.1.2.

Unutarnjim vodičem koaksijalnog kabela teče struja jakosti I . Odredite promjenu jakosti magnetskog polja u drugom (vanjskom) vodiču. Također izračunajte jakost magnetskog polja na unutarnjoj i vanjskoj površini vanjskog vodiča.

Podatci: $I = 15 \text{ A}$, $R_1 = 4 \text{ mm}$, $R_2 = 6 \text{ mm}$, $R_3 = 8 \text{ mm}$.

Rješenje Koaksijalni kabel takav je kabel koji ima dva vodiča kružnog poprečnog presjeka, jedan punog presjeka i drugi šuplji, smještene tako da su im osi podudarne, slika 1.



Sl. 1. Koaksijalni kabel ima jedan polazni i jedan povratni vodič

Ako je prostor karakteriziran magnetskom značajkom μ_0 , tada zakon protjecanja (15.1) možemo iskazati pomoću jakosti magnetskog polja (15.2):

$$\oint_k \vec{H} d\vec{l} = \sum_{m=1}^n I_m \quad (1)$$

Za krivulju k bira se kružnica s ishodištem u osi koaksijalnog kabela radijusa $R_2 < r < R_3$. Iz slike je vidljivo da su vektori \vec{H}_1 , što ga uzrokuje struja unutarnjeg vodiča, i vektor \vec{H}_2 , što ga uzrokuje samo dio struje vanjskog vodiča, suprotni pa vektorski zbroj/razlika prelazi u algebarski zbroj/razliku:

$$H = H_1 - H_2 \quad (2)$$

gdje je:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

jakost magnetskog polja što ga stvara struja unutarnjeg vodiča na udaljenosti r od središta, prema (9) primjera 15.1.1.

$$H_2 = \frac{I^*}{2\pi r} \quad (4)$$

jakost magnetskog polja što ga stvara dio struje vanjskog vodiča,

$$I^* = \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I \quad (5)$$

dio struje vanjskog vodiča.

Uvrštavanjem (3) i (4) s (5) u (2) dobije se:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) \quad (6)$$

Jakost magnetskog polja na unutarnjoj plohi vanjskog vodiča, $r = R_2$, jest:

$$H = \frac{I}{2\pi R_2} \quad (7)$$

Jakost magnetskog polja na vanjskoj plohi vanjskog vodiča, $r = R_3$, jest:

$$H = 0 \quad (8)$$

što je bilo i za očekivati jer se radi o koaksijalnom kabelu.

Napomena: Izvod za $H(r)$, v.P (22.2) II. Sveska.

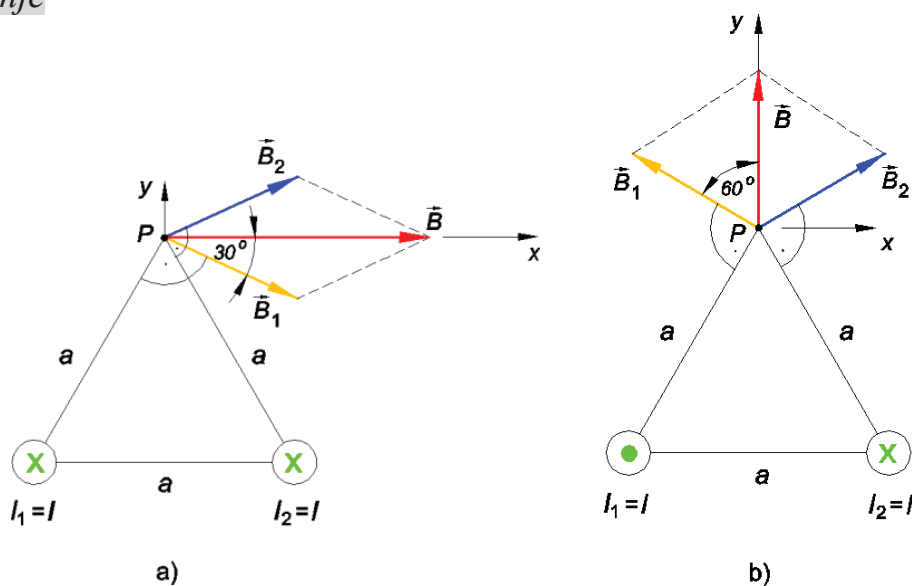


Primjer 15.1.3.

Kroz dva ravna, beskonačna duga vodiča međusobno paralelna, zanemarivog presjeka, teku struje jakosti I . Vodiči su smješteni u dva vrha jednakostraničnog trokuta stranice a , slika 1. Odredite vektor magnetske indukcije po iznosu i smjeru u trećem vrhu jednakostraničnog trokuta ako struje teku u istom/različitim smjerovima.

Podatci: $I = 25 \text{ A}$, $a = 6 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Smjer struje kroz paralelne vodiče je u istom a) i suprotnom smjeru b)

Na slikama 1a i 1b prikazani su pojedini vektori magnetske indukcije što ih stvaraju struje $I_1 = I_2 = I$ u trećem vrhu jednakostraničnog trokuta. Pojedini vektori indukcije okomiti su na spojnicu točke promatranja P (treći vrh jednakostraničnog trokuta) i struje koja ga stvara.

- Struje u vodičima su u *istom smjeru*. Svaka od struja stvara u točki promatranja P indukciju B prema (9) primjera 15.1.1:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \quad (1)$$

Rezultirajuća indukcija jednaka je vektorskom zbroju, slika 1a, i ima smjer pozitivne apscisne osi:

$$\vec{B} = 2B_1 \cos 30^\circ \cdot \vec{e}_x \quad (= 1,44 \cdot 10^{-6} \vec{e}_x \text{ T}) \quad (2)$$

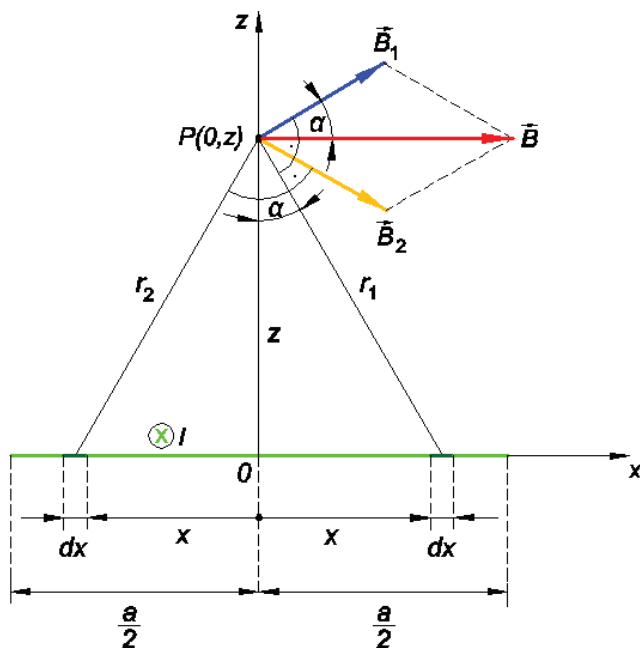
- Struje u vodičima su u *suprotnom smjeru*. Svaka od struja stvara u točki promatranja P indukciju iznosa (1). Rezultirajuća indukcija, prema slici 1b, jednaka je vektorskom zbroju pojedinih indukcija i ima smjer pozitivne ordinantne osi:

$$\vec{B} = 2B_1 \cos 60^\circ \cdot \vec{e}_y \quad (= 0,833 \cdot 10^{-6} \vec{e}_y \text{ T}) \quad (3)$$



Primjer 15.1.4.

Ravnim, beskonačno dugim strujnim listom konačne širine teče struja jakosti I . Odredite raspodjelu magnetske indukcije duž osi okomite na strujni list, a na polovini njegove širine.

Rješenje

Sl. 1. Strujnim listom teče struja konstantne jakosti I ($r_1=r_2=r$)

Indukcija B u točki promatranja $P(0,z)$ jednaka je zbroju indukcija koje stvaraju kvazilinijske struje:

$$dI = \frac{I}{a} dx \quad (1)$$

Prema (2) primjera 15.1.3 u točki P , a zbog simetrije indukcija ima samo komponentu u smjeru osi apcise, v. sliku 1a istog primjera.

$$dB = 2\mu_0 \frac{dI}{2\pi r} \cos \alpha \quad (2)$$

gdje je:

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (3)$$

udaljenost kvazilinijske struje dI do točke promatranja P ,

α kut što ga zatvara radijus r s osi aplikata ($\cos \alpha = \frac{z}{r}$).

Uvrštavanjem (1) i (3) u (2) dobije se:

$$B = 2 \frac{\mu_0 I z}{2\pi a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{z^2 + x^2} \quad (4)$$

Napomena:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

Integriranjem dobije se:

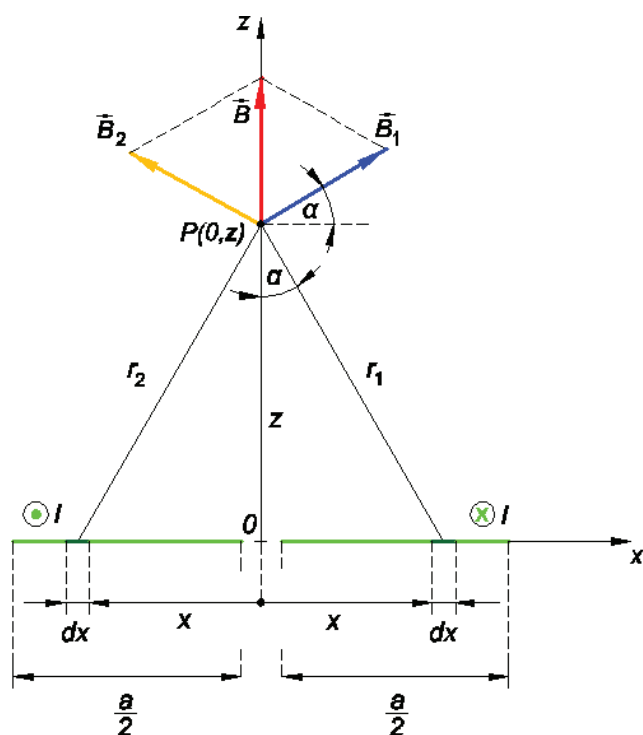
$$B = \frac{\mu_0 I z}{\pi a} \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\mu_0 I z}{\pi a} \operatorname{arctg} \frac{a}{2z} \quad (5)$$



Primjer 15.1.5.

Dva ravna, beskonačno duga strujna lista konačne širine čine električni vod. Listovi leže u istoj ravnini, međusobno su paralelni i na bliskoj su udaljenosti x_0 . Odredite raspodjelu magnetske indukcije duž osi okomite na strujne listove koja se nalazi u prostoru među listovima, ako listovima teku struje $\pm I/2$.

Rješenje

Sl. 1. Strujnim listom teku struje $\pm I$ iste jakosti ($r_1 = r_2 = r$)

Indukcija B u točki promatranja $P(0,z)$ jednaka je zbroju indukcija koje stvaraju kvazilinijske struje:

$$dI = \frac{2I}{a} dx \quad (1)$$

Prema (3) primjera 15.1.3 indukcija u točki P , a zbog simetrije ima samo komponentu u smjeru ordinatne osi, v. sliku 1b istog primjera:

$$dB = 2\mu_0 \frac{dI}{2\pi r} \sin \alpha \quad (2)$$

gdje je:

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (3)$$

udaljenost kvazilinijske struje dI do točke promatranja P ,

α - kut što ga zatvara radijus r s osi aplikata ($\sin \alpha = \frac{x}{r}$).

Uvrštavanjem (1) i (3) u (2) dobije se:

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi a} \int_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{x dx}{z^2 + x^2} \quad (4)$$

Napomena: za riješiti integral (4) koristite supstituciju $x^2 + z^2 = u^2$. Integriranjem dobije se:

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi a} \ln(z^2 + x^2) \Big|_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{a}{2}} = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi a} \ln \frac{a^2 + 4z^2}{x_0^2 + 4z^2} \quad (5)$$

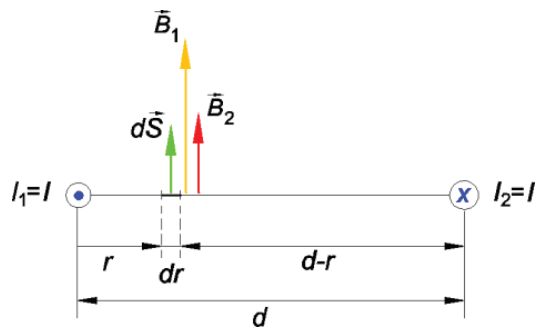


Primjer 15.1.6.

Vod ima dva vodiča međusobno paralelna na udaljenosti d (udaljenost među osima vodiča). Vodiči su konačnog presjeka, radijusa R . Odredite magnetski tok po jedinici duljine unutar površine među vodičima.

Podatci: $I = 150 \text{ A}$, $d = 160 \text{ cm}$, $R = 1 \text{ cm}$.

Rješenje Na slici 1 prikazan je poprečni presjek voda s ucrtanim smjerovima struje, vektorom indukcije i elementom površine.



Sl. 1. Poprečni presjek električnog voda

Magnetski tok, prema (14.4), jest:

$$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) d\vec{S} \quad (1)$$

Budući da su vektori indukcije \vec{B}_1 i \vec{B}_2 međusobno kolinearni, a ujedno i kolinearni s elementom površine $d\vec{S}$, skalarni umnožak vektora prelazi u algebarski umnožak:

$$\phi = \int_S (B_1 + B_2) dS \quad (2)$$

gdje je:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}, \quad B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi(d-r)} \quad (3)$$

indukcija, prema (11) primjera 15.1.1, što je uzrokuje struje vodiča u točki promatranja,

$$dS = dr \cdot 1 \quad (4)$$

element površine.

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr \quad (5)$$

Integriranjem dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln r - \ln(d-r) \right] \Big|_{r=R}^{r=d-R} \quad (6)$$

Uvrštavanjem granica i sređivanjem dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{d-R}{R} \right)^2 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-R}{R} \quad (7)$$

Budući da je $d \gg R$, jednadžba (7) poprima oblik:

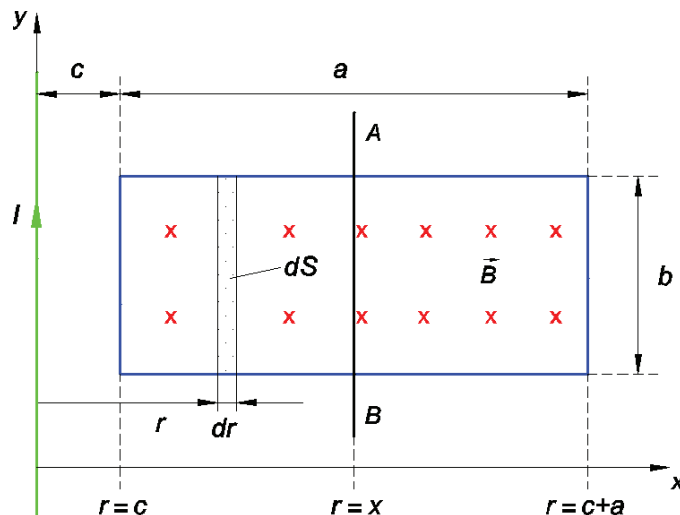
$$\phi = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{R} \quad (= 0,304 \text{ mVs}) \quad (8)$$



Primjer 15.1.7.

Beskonačno dugi ravni vodič i petlja $a \times b$ leže u istoj ravnini, slika 1. Vodič je od petlje udaljen za c i njime teče struja jakosti I . Pomičnim vodičem AB od jedne petlje načinite dvije i to tako da su tokovi u njima međusobno jednaki. Odredite dimenzije novonastalih petlji.

Podatci: $I = 50 \text{ A}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 0,8 \text{ m}$, $c = 0,1 \text{ m}$.

Rješenje

Sl. 1. Vodič AB dijeli petlju $a \times b$ na dvije petlje

Prema zadatku tok u petlji $(x-c)b$ mora biti jednak toku u petlji $(a-x)b$. Tok u prvoj petlji prema (14.4), jest:

$$\phi_1 = \int_c^x \vec{B} d\vec{S} \quad (1)$$

Tok u drugoj petlji, prema istoj relaciji, jest:

$$\phi_2 = \int_x^{a+c} \vec{B} d\vec{S} \quad (2)$$

gdje je:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

indukcija, prema (11) primjera 15.1.1, beskonačno dugog, ravnog vodiča kojim teče struja jakosti I ,

$$dS = b dr \quad (4)$$

element površine petlje, slika 1.

Budući da su vektori indukcije \vec{B} i elementa površine $d\vec{S}$ međusobno kolinearni/suprotni, skalarni umnožak (1)/(2) prelazi u obični.

Uvrštavanjem (3) i (4) u (1) dobije se:

$$\phi_1 = \int_c^x \mu_0 \frac{I}{2\pi} b \frac{dr}{r} \quad (5)$$

Integracijom dobije se:

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x}{c} \quad (6)$$

Tok u drugoj petlji odredit će se ponavljajući postupke izračuna toka u prvoj petlji:

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{x} \quad (7)$$

Izjednačavanjem tokova dobije se:

$$x = \sqrt{c(c+a)} \quad (= 0,4 \text{ m}) \quad (8)$$

Dimenzije petlji su:

$$(x - c) \times b = 0,3 \times 0,8 \text{ m}^2$$

$$(a - x) \times b = 1,1 \times 0,8 \text{ m}^2$$

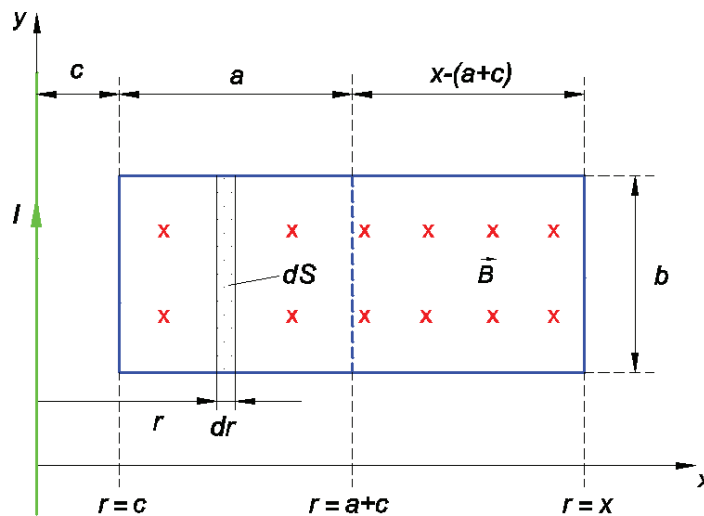


Primjer 15.1.8.

Beskonačno dugi ravni vodič i petlja $a \times b$ leže u istoj ravnini, slika 1. Vodič je od petlje udaljen za c i njime teče struja jakosti I . Za koliko se mora produžiti stranica a da se tok u petlji udvostruči?

Podatci: $I = 50 \text{ A}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,8 \text{ m}$, $c = 0,1 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Petlja i vodič leže u istoj ravnini

Tok u petlji $a \times b$, prema (14.4), jest:

$$\phi_{ab} = \int \vec{B} d\vec{S} \quad (1)$$

gdje je:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad (2)$$

indukcija, prema (11) primjera 15.1.1, beskonačno dugog, ravnog vodiča kojim teče struja jakosti I ,

$$dS = b dr \quad (3)$$

element površine petlje, slika 1.

Budući da su vektori \vec{B} i $d\vec{S}$ u (1) međusobno kolinearni, skalarni umnožak prelazi u algebarski. Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) traženi tok jest:

$$\phi_{ab} = \int_c^{c+a} \mu_0 \frac{I}{2\pi} b \frac{dr}{r} \quad (4)$$

Integracijom dobije se:

$$\phi_{ab} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} \quad (5)$$

Da bi se tok petlje $a \times b$ udvostručio, stranicu a treba povećati tako da je tok petlje $(x - (a + c)) \times b$ jednak toku petlje $a \times b$.

Tok u petlji $(x - (a + c)) \times b$ (- ponovite postupak izračuna toka u petlji $a \times b$), jest:

$$\phi_{(x-(a+c))b} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x}{c+a} \quad (6)$$

Izjednačavanjem (5) i (6) dobije se $x = 1,6 \text{ m}$.

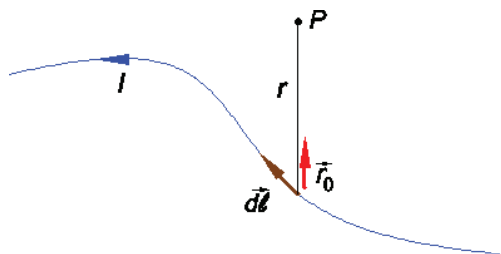
Stranica a mora se povećati

$$\text{za } x - (c + a) \quad (= 1,2 \text{ m}) \quad (7)$$



15.2. Biot-Savartov zakon

Magnetska indukcija \vec{B} u bilo kojoj točki prostora sl.1, čiji je uzročnik struja I u vodiču bilo kakvog oblika, prema (22.14), jest:



Sl. 1. Određivanje magnetske indukcije u bilo kojoj točki prostora

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (15.3)$$

gdje je:

r - udaljenost elementa vodiča $d\vec{l}$ do promatrane točke (m)

I - jakost struje (A)

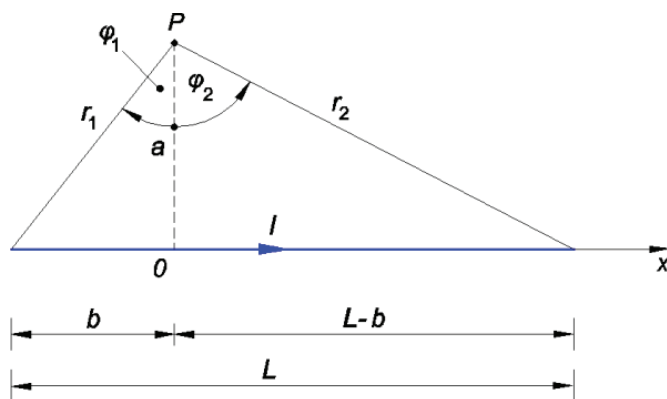
\vec{r}_0 - jedinični vektor usmjeren od elementa vodiča $d\vec{l}$ prema točki promatranja

$d\vec{l}$ - element duljine vodiča, kojem je smjer određen smjerom struje u vodiču (m).

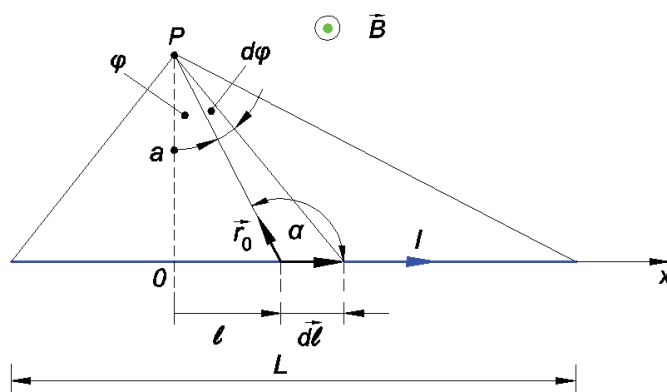
Primjer 15.2.1.

Kroz ravni vodič duljine L teče struja jakosti I . Odredite vektor indukcije \vec{B} po iznosu i smjeru u točki P na udaljenosti a od vodiča, slika 1a. Posebno odredite indukciju \vec{B} ako $L \rightarrow \infty$.

Podatci: $I = 250 \text{ A}$, $L = 7,5 \text{ m}$, $a = 0,75 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$.

Rješenje

a)



b)

Sl. 1. Točka promatranja P nalazi se na udaljenosti a od vodiča a), element duljine $d\vec{l}$ vidi se pod kutom $d\varphi$ iz točke promatranja P b)

Indukcija \vec{B} u točki promatranja P , prema (15.3), jest:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (1)$$

Vektorski umnožak $d\vec{l} \times \vec{r}_0$, u (1), za bilo koji element duljine $d\vec{l}$ ravnog vodiča, daje doprinos $d\vec{B}$ u točki promatranja P smjera “iz papira“ (potvrdite to pravilom desne ruke). Slijedi, vektorski zbroj doprinosa $d\vec{B}$ prelazi u algebarski zbroj. Jednadžba (1) postaje:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \quad (2)$$

U (2) pojavljuju se tri varijable: α , l i r . Nužno je, rješenja radi, svesti ih samo na jednu nezavisnu varijablu i to φ . Iz slike 1b razabire se:

$$l = a \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad (3a)$$

$$\alpha + (90 - \varphi) = 180 \Rightarrow d\alpha = d\varphi \quad (3b)$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos \varphi} \quad (3c)$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobije se:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \varphi d\varphi \quad (4)$$

Magnetska indukcija u točki P jest:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi \quad (5)$$

Iz točke promatranja P vidi se vodič duljine L pod kutom $(-\varphi_1, \varphi_2)$. Integracijom (5) i uvrštavanjem granica dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (6)$$

gdje je prema slici 1a:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (= 63,43^\circ) \quad (7a)$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{L-b}{a} \quad (= 82,87^\circ) \quad (7b)$$

Indukcija B prema (6) u točki promatranja P , prema (6), jest: $B = 62,88 \mu\text{T}$.

Beskonačno dugi vodič iz točke promatranja vidi se pod kutovima ($\varphi_1 = \varphi_2$). Slijedi, prema (6), tražena indukcija:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (= 66,66 \mu\text{T}) \quad (8)$$

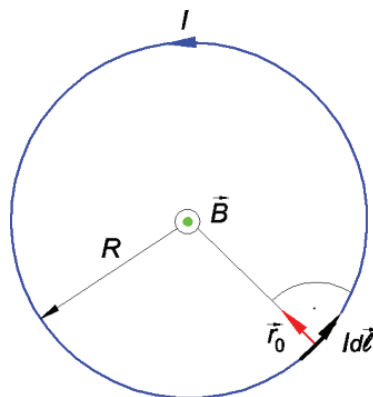


Primjer 15.2.2.

Kružnom petljom radijusa R teče struja jakosti I . Izračunajte magnetsku indukciju \vec{B} u središtu petlje.

Podatci: $I = 50 \text{ A}$, $R = 0,05 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Strujnom kružnom petljom teče struja jakosti I

Diferencijal magnetske indukcije \vec{B} u središtu petlje, što je uzrokuje element strujne petlje $I d\vec{l}$, prema (15.3), jest:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (1)$$

Za dani smjer struje, slika 1, prema pravilu desne ruke, smjer indukcije bilo kojeg elementa strujne petlje a u središtu S te iste kružne petlje je “iz papira“. Slijedi, vektorski zbroj (1) prelazi u algebarski. I nadalje, kut između $d\vec{l}$ i \vec{r}_0 jest pravi kut pa (1) postaje:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2R\pi} \frac{dl}{R^2} \quad (2)$$

Integriranjem dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (= 0,63 \text{ mT}) \quad (3)$$

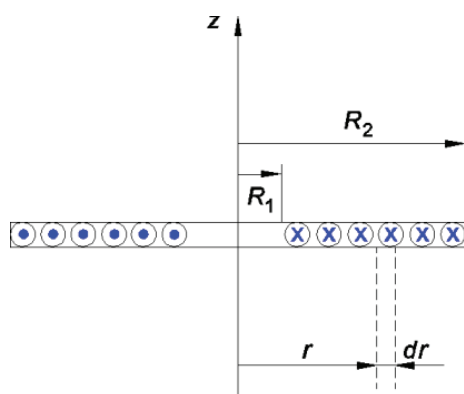


Primjer 15.2.3.

N zavoja namotano je gusto na neferomagnetski disk u jednoj ravnini, slika 1. Odredite indukciju u središtu diska.

Podatci: $I = 0,5 \text{ A}$, $R_1 = 3 \text{ cm}$, $R_2 = 7 \text{ cm}$, $N = 650$.

Rješenje



Sl. 1. Svitak od N zavoja namotan je gusto u jednoj ravnini na neferomagnetski disk

Magnetska indukcija \vec{B} odredit će se uporabom Biot-Savartova zakona (15.3):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I^*}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (1)$$

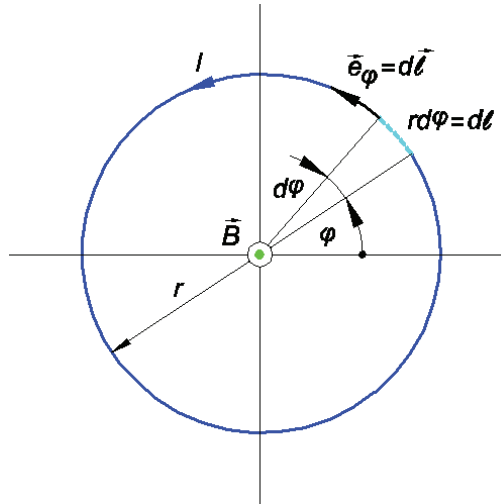
gdje je:

$$I^* = \frac{IN}{R_2 - R_1} dr \quad (2)$$

struja svitka što je nosi element radiusa dr ,

$$d\vec{l} = r d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (3)$$

element duljine kružne petlje debljine dr , vidi sliku 2.



Sl. 2. Element kružnice dl vidi se iz središta kružnice radiusa r pod kutom $d\varphi$

Budući da je $\vec{e}_\varphi \times \vec{r}_0 = \vec{e}_z$, jednadžba (1) postaje:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I N}{4\pi(R_2 - R_1)} \frac{d\varphi dr}{r} \quad (4)$$

Integriranje po $\varphi(0, 2\pi)$ jest 2π , pa (4) postaje:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I N}{2(R_2 - R_1)} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

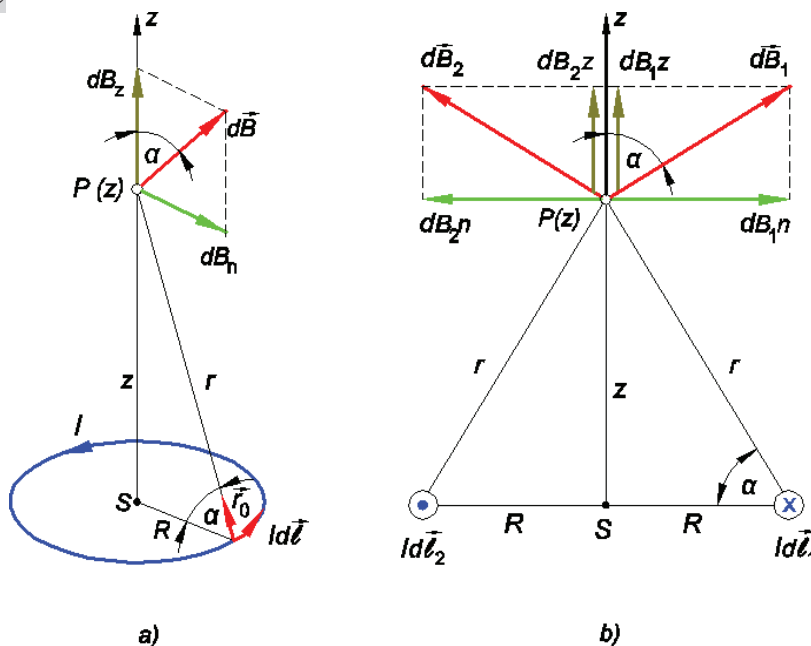
Integriranjem po $r (R_1, R_2)$ (5) dobije se:

$$B_z = \frac{\mu_0 I N}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (= 4,32 \text{ mT}) \quad (6)$$



Primjer 15.2.4.

Kružnom petljom radijusa R teče struja jakosti I . Izračunajte magnetsku indukciju duž osi kružne petlje. Također nacrtajte raspodjelu indukcije \vec{B} duž osi petlje.

Rješenje

Sl. 1. Doprinos indukcije $d\vec{B}$ od elementa $Id\vec{l}$ a), normalne komponente bilo koja dva dijametralna elementa $Id\vec{l}$ međusobno se poništavaju b)

Doprinos indukcije $d\vec{B}$ elementa $Id\vec{l}$ u točki promatranja P , prema (15.3), jest:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (1)$$

Budući da

element vodiča $d\vec{l}$ zatvara pravi kut s jediničnim vektorom $d\vec{B}$, slika 1a,

normalne komponente bilo koja dva dijametralna elementa $Id\vec{l}$ međusobno se poništavaju, slika 1b,

pa ostaju samo z komponente indukcije i vektorski zbroj prelazi u algebarski zbroj:

$$dB_z = dB \cos \alpha \quad (2)$$

Uvrštavanjem (1) u (2) dobije se:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos \alpha}{r^2} \quad (3)$$

Budući da je element vodiča $d\vec{l}$ neovisan o varijablama α i r , integriranjem (3) dobije se:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl \quad (4)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 IR \cos \alpha}{2r^2} \quad (5)$$

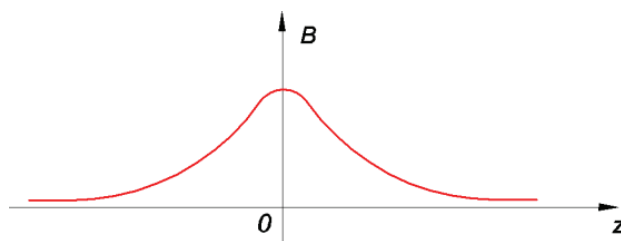
gdje je prema slici 1b

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} \quad r = \sqrt{z^2 + R^2} \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (5) dobije se:

$$B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Iz (7) vidljivo je da indukcija ima maksimalni iznos za $z = 0$, $B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$ pa da za $z \rightarrow \pm\infty$ indukcija $B_z \rightarrow 0$, slika 2.



Sl. 2. Raspodjela indukcije duž aplikate z



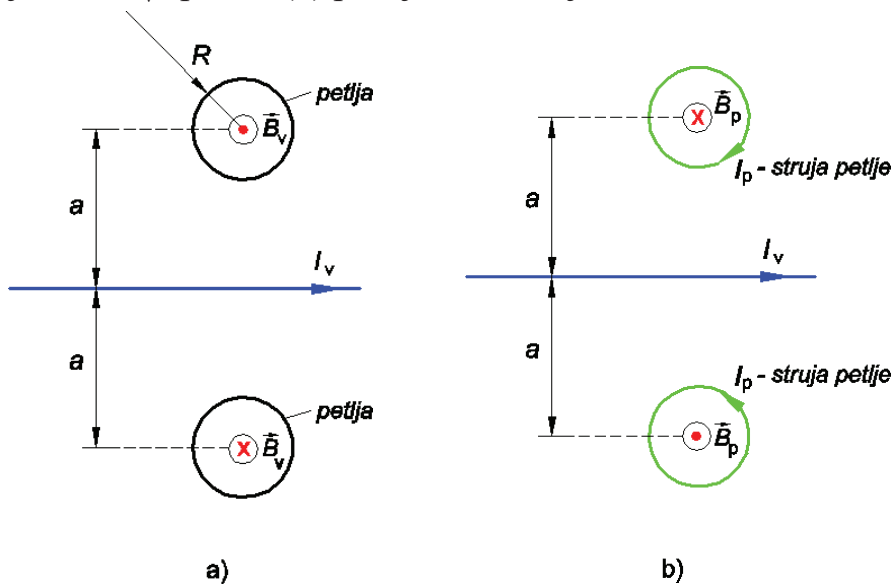
Primjer 15.2.5.

Beskonačno dugim ravnim vodičem teče struja jakosti I . Na udaljenosti a od vodiča nalaze se dvije strujne petlje kružnog oblika i radijusa R , pri čemu je $R < a$. Strujne petlje i vodič nalaze se u istoj ravnini. Odredite struje strujnih petlji po iznosu i smjeru na način da je indukcija u njihovu središtu jednaka nuli.

Podatci: $I_v = 40 \text{ A}$, $R = 5 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$.

Rješenje

Na slici 1a prikazan je vodič i strujna petlja te smjer indukcije \vec{B} čiji je uzrok struja vodiča. Indukcija \vec{B} , ravnog, beskonačnog dugog vodiča protjecanog strujom jakosti I_v , prema (8) primjera 15.2.1 jest:



Sl. 1. Smjer indukcije u središtu petlji, \vec{B}_v , kao posljedica struje vodiča a) te smjerovi struja petlji čija će indukcija \vec{B}_p poništiti indukciju vodiča \vec{B}_v b)

$$B_v = \frac{\mu_0 I_v}{2\pi a} \quad (1)$$

Indukcija \vec{B}_p što je stvara struja petlje I_p u središtu petlje, prema (3) iz primjera 15.2.2 jest:

$$B_p = \frac{\mu_0 I_p}{2R} \quad (2)$$

Iz jednakosti magnetskih indukcija (1) i (2) dobije se:

$$I_p = \frac{R}{\pi a} I_v \quad (= 6,366 \text{ A})$$



Primjer 15.2.6.

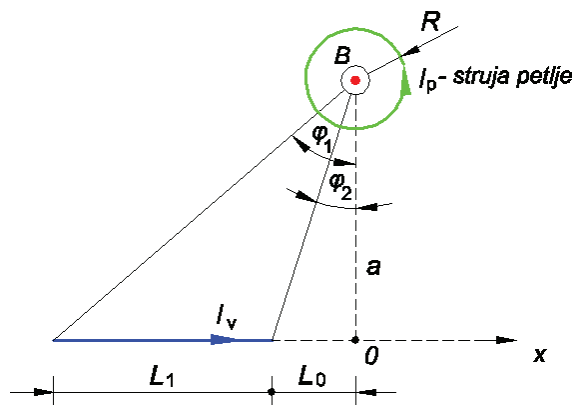
Strujnom petljom kružnog oblika, radijusa R , teče struja jakosti I_p . Na udaljenosti a od njezina središta nalazi se vodič duljine L_1 kojim teče struja jakosti I_v . Petlja i vodič leže u istoj ravnini. Za zadane smjerove struja u vodiču i strujnoj petlji odredite rezultirajuću magnetsku indukciju u središtu strujne petlje za:

- zadanu struju strujne petlje i vodiča, slika 1
- takvu duljinu vodiča pri kojoj je rezultirajuća indukcija jednaka dvostrukoj indukciji strujne petlje, slika 2
- ravni vodič koji jednom svojom stranom $\rightarrow +\infty$, slika 3.

Podatci: $I_p = 6,5 \text{ A}$, $I_v = 130 \text{ A}$, $a = 1 \text{ m}$, $L_1 = 3 \text{ m}$, $L_0 = 0,5 \text{ m}$, $R = 0,2 \text{ m}$.

Rješenje

a)



Sl. 1. Vodič duljine L_1 smješten je asimetrično s obzirom na strujnu petlju

Smjerovi vektora magnetske indukcije strujne petlje i ravnog vodiča u središtu strujne petlje međusobno su kolinearni, "izlaze" iz papira, pa vektorski zbroj indukcije prelazi u algebarski:

$$B = B_p + B_v \quad (1)$$

gdje je:

$$B_p = \frac{\mu_0 I_p}{2R} \quad (2)$$

indukcija strujne petlje radijusa R u njezinu središtu, prema (3) primjera 15.2.2,

$$B_v = \frac{\mu_0 I_v}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (3)$$

indukcija ravnog vodiča duljine L_1 na udaljenosti a od njega, prema (6) primjera 15.2.1,

$$\varphi_1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 > 0 \quad (4a)$$

$$\varphi_2 = -\alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 > 0 \quad (4b)$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{L_1 + L_0}{a} \quad (= 74,05^\circ) \quad (5a)$$

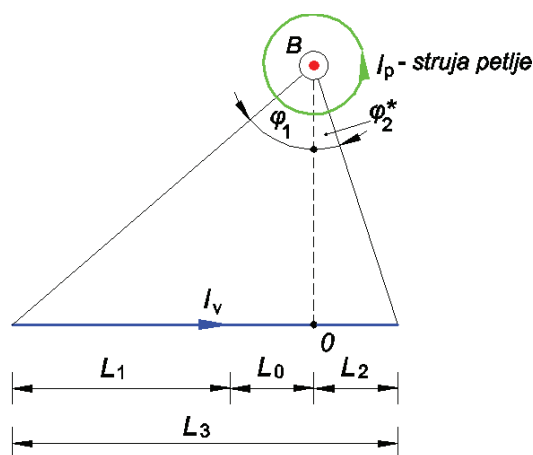
$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{L_0}{a} \quad (= 26,56^\circ) \quad (5b)$$

kutovi pod kojima se vidi ravni vodič duljine L_1 iz točke promatranja P , v. sliku 1.

Tražene indukcije prema (2) i (3) jesu:

$$B_v = 6,68 \mu\text{T}, \quad B_p = 20,42 \mu\text{T}, \quad B = 27,1 \mu\text{T}.$$

b)



Sl. 2. Ravni vodič duljine L_1 poprimio je duljinu L_3

Budući da se zadatkom traži da je rezultirajuća indukcija u središtu strujne petlje jednaka dvostrukoj vrijednosti indukcije strujne petlje, slijedi da je:

$$B_p = B_v \quad (6)$$

gdje je:

B_p indukcija strujne petlje u njezinu središtu (2),

$$B_v = \frac{\mu_0 I_v}{4\pi a} (\sin \varphi_2^* + \sin \varphi_1) \quad (7)$$

indukcija ravnog vodiča duljine L_3 na udaljenosti a od njega, prema (6) primjera 15.2.1 (ravni vodič L_3 definiran je kutovima φ_1 - poznat i φ_2^* - nepoznat,

$$\varphi_2^* = \alpha_2^* \quad , \quad \alpha_2^* > 0 \quad (8)$$

kut pod kojim se iz točke promatranja P vidi vodič duljine L_2 .

Uvrštavanjem (2) i (7) u (6) dobije se:

$$\frac{\mu_0 I_v}{4\pi a} (\sin \varphi_2^* + \sin \varphi_1) = \frac{\mu_0 I_p}{2R} \quad (9)$$

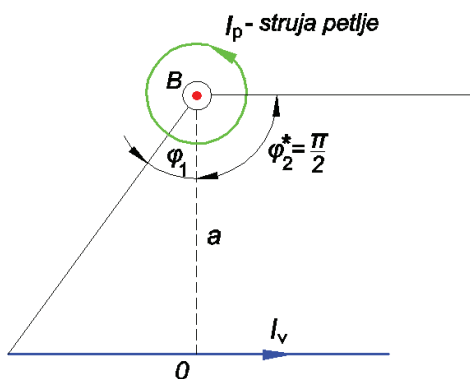
Iz (9) dobije se: $\varphi_2^* = 37,54^\circ$

Iz slike 2 dobije se:

$$L_2 = a \operatorname{tg} \varphi_2^* \quad (= 0,768 \text{ m}) \quad (10)$$

Ukupna duljina vodiča jest: $L_3 = L_1 + L_0 + L_2 = 4,268 \text{ m}$.

c)



Sl. 3. Strujna petlja i vodič polubeskonačne duljine

Rezultirajuća indukcija, kao i u a), jednaka je superpoziciji indukcija strujne petlje i ravnog vodiča:

$$B = B_p + B_v \quad (11)$$

gdje je:

B_p indukcija strujne petlje u njezinu središtu (2),

$$B_v = \frac{\mu_0 I_v}{4\pi a} (\sin \varphi_2^* - \sin \varphi_1) \quad (= 25,5 \mu\text{T}) \quad (12)$$

indukcija vodiča polubeskonačne duljine, primjera 15.2.1,

$$\varphi_1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 > 0 \quad (\alpha_1 = 74,05^\circ) \quad (13a)$$

$$\varphi_2^* = \alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 > 0 \quad (\alpha_2 = +\frac{\pi}{2}) \quad (13b)$$

kutovi pod kojima se vidi ravni vodič iz točke promatranja P .

Rezultirajuća indukcija, prema (11), jest: $B = 45,92 \mu\text{T}$.

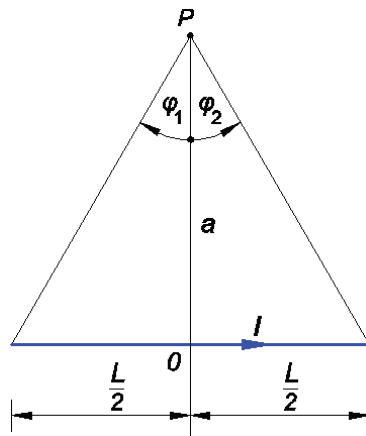


Primjer 15.2.7.

Nadomjestite vodič beskonačne duljine kojim teče struja jakosti I vodičem konačne duljine L kojim teče jednaka struja na način da je indukcija B_k vodiča konačne duljine na udaljenosti a od njega unaprijed zadani postotak p indukcije B_∞ beskonačno dugog vodiča.

Podatci: $a = 1 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Vodič konačne duljine L , vidi se i točka promatranja P pod kutom 2φ

Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$B_k = pB_\infty \quad (1)$$

gdje je:

$$B_k = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (2)$$

indukcija vodiča konačne duljine, prema (6) primjera 15.2.1,

$$B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (3)$$

indukcija beskonačno dugog, ravnog vodiča, prema (11) primjera 15.1.1

$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi \quad (4)$$

kutovi, vidi sliku 1, pod kojima se iz točke P vidi vodič konačne duljine.

Uvrštavanjem (2) i (3) uz (4) dobije se:

$$\varphi = \arcsin p \quad (5)$$

Točka promatranja P nalazi se na polovici duljine vodiča, a na udaljenosti a od njega.

$$L = 2a \operatorname{tg} \varphi \quad (6)$$

Daje se duljina L za neke od postotaka p :

p	$\varphi(^{\circ})$	$L(\text{m})$
0,95	71,81	6,085
0,96	73,74	6,857
0,97	75,93	7,98
0,98	78,52	9,85
0,99	81,89	14,036

Zaključak: Iz (1) slijedi da ako raste p , raste i L i obrnuto.



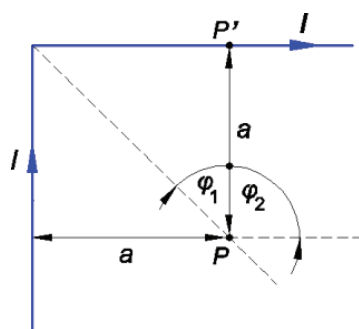
Primjer 15.2.8.

Ravni, beskonačno dugi vodič savijen je pod pravim kutom. Vodičem teče struja jakosti I . Odredite promjenu magnetske indukcije duž simetrale:

- unutarnjeg kuta, slika 1
- vanjskog kuta, slika 2.

Rješenje

a) promjena indukcije duž simetrale unutarnjeg kuta



Sl. 1. Beskonačno dugi, ravni vodič savijen je pod pravim kutom

Smjer indukcije B u točki promatranja P za zadani smjer struje, uporabom pravila desne ruke, od jednog i drugog polubeskonačnog dugog vodiča je u "papir". Zbog simetrije, jednaka udaljenost točke promatranja P od jednog i drugog vodiča, rezultirajuća indukcija jednaka je algebarskom zbroju

indukcija svakog od polubeskonačnog vodiča. Prema (6) primjera 15.2.1 dobije se:

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (1)$$

gdje je:

$$\varphi_1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 = +45^\circ$$

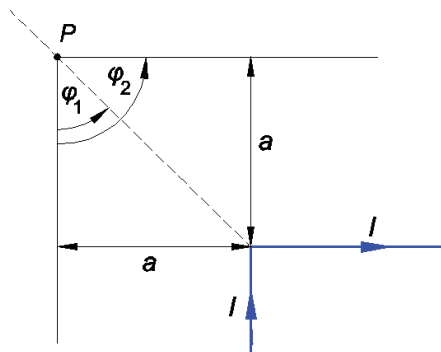
$$\varphi_2 = \alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 = +90^\circ$$

kutovi pod čijim se zbrojem $\varphi_1 + \varphi_2$ iz točke promatranja P vidi jedan od polubeskonačno dugih vodiča.

Uvrštavanjem iznosa kutova u (1) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (2 + \sqrt{2}) \quad (2)$$

b) promjena indukcije duž simetrale vanjskog kuta



Sl. 2. Beskonačno dugi, ravni vodič savijen je pod pravim kutom

Smjer indukcije B u točki promatranja P za zadani smjer struja je iz "papira". Zbog simetrije, navedene u a), rezultirajuća indukcija, prema (6) primjera 15.2.1, jest:

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (3)$$

gdje je:

$$\varphi_1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 = -45^\circ$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 = +90^\circ$$

kutovi pod čijom se razlikom $\varphi_1 - \varphi_2$ iz točke promatranja P vidi jedan od polubeskonačno dugih vodiča.

Uvrštavanjem iznosa kutova u (3) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (2 - \sqrt{2}) \quad (4)$$



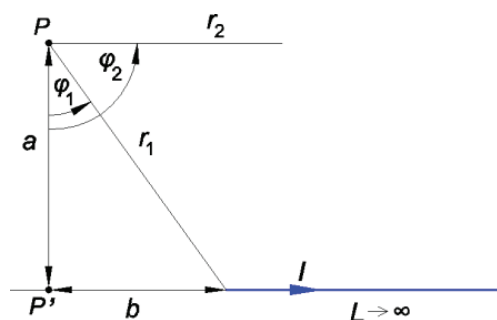
Primjer 15.2.9.

Pokažite da je indukcija B ravnog vodiča kojim teče struja jakosti I jednaka nuli u svim točkama njegove osi (van vodiča) ako:

- duljina jednog kraja vodiča $\rightarrow +\infty$
- je vodič konačne duljine L .

Rješenje

a)



Sl. 1. Vodič duljine $L \rightarrow +\infty$ vidi se iz točke promatranja pod kutom $\varphi_2 - \varphi_1$

Iznos magnetske indukcije B u točki promatranja P , prema (6) primjera 15.2.1, jest:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (1)$$

gdje je:

φ_1 i φ_2 kutovi pod kojim se vide početak i kraj vodiča iz točke P .

Teži li točka P prema P_1 , dakle teži li $a \rightarrow 0$, kut $\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, pri čemu je kut

$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ i nepromjenjiv je.

Prema slici 1 udaljenost točke promatranja P od osi vodiča jest:

$$a = r_1 \cos \varphi_1 \quad (2)$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1} \frac{\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} \quad (3)$$

U graničnom prijelazu, ako $a \rightarrow 0$, odnosno $\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ dobije se:

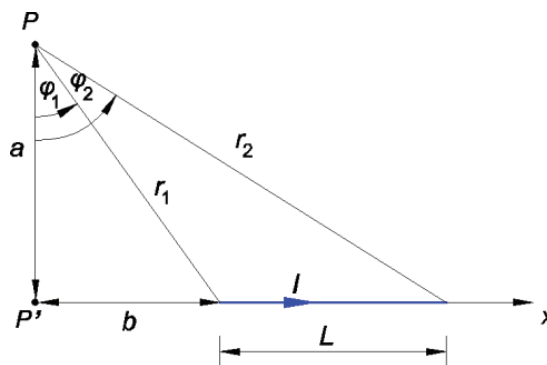
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1} \lim_{\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} \quad (4)$$

neodređeni oblik $\frac{0}{0}$. Pri tome udaljenost $r_1 \rightarrow b$ (konačna vrijednost).

Uporabom L'Hospitalova pravila na (4) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1} \lim_{\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{0 + \cos \varphi_1}{-\sin \varphi_1} (= 0\text{T}) \quad (5)$$

b)



Sl. 2. Vodič konačne duljine L vidi se iz točke P pod razlikom kutova $\varphi_2 - \varphi_1$

Indukcija B u točki promatranja P , prema (3), jest:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r_1} \frac{\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} \quad (6)$$

U graničnom prijelazu kada $a \rightarrow 0$ kutovi $\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ i $\varphi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Slijedi:

granični prijelaz funkcije (6) jest s dvjema nezavisnim varijablama.

Napomena: Iz matematike je poznato ako funkcija dviju varijabli ima sigurno granični prijelaz, tada je:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_x(x,y) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)) \quad (7)$$

Granični prijelaz (6) prema (7) jest:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r_1} \lim_{\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{\varphi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} \right) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r_1} \lim_{\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} \right) \quad (8)$$

Limes (8) jest neodređen oblik $\frac{0}{0}$.

Primjenom L'Hospitalova pravila na (8) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r_1} \lim_{\varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi_1}{-\sin \varphi_1} (= 0) \quad (9)$$

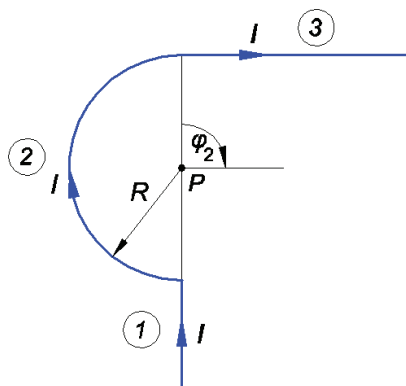


Primjer 15.2.10.

Dva polubeskonačno duga, ravna vodiča spojena su međusobno polovinom strujne petlje radijusa R , slika 1. Odredite indukciju B u središtu strujne petlje.

Podatci: $I = 40 \text{ A}$, $R = 0,1 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Polukružna strujna petlja i polubeskonačno dugi vodiči

Rezultirajuća magnetska indukcija B u točki promatranja P jest zbroj triju indukcija. Budući da su doprinosi indukcija od svih triju vodiča istog smjera, vektorski zbroj prelazi u algebarski:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 \quad (1)$$

Doprinos indukciji od struje u polubeskonačno dugom vodiču 1 jest nula indukcija $B_1 = 0$, vidi primjer 15.2.9.

Doprinos indukcije od struje u polupetlji, prema (3) primjera 15.2.2, jest:

$$B_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (= 125,66 \mu\text{T}) \quad (2)$$

Doprinos indukcije od struje u polubeskonačnom dugom vodiču 2, prema (6) primjera 15.2.1, jest:

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (3)$$

gdje je $a = R$ udaljenost ravnog vodiča 3 od točke promatranja,

$$\varphi_1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 = 0$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 = +\frac{\pi}{2}$$

kut pod kojim se iz točke P vidi polubeskonačni ravni vodič 3.

Uvrštavanjem u (3) dobije se:

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (= 40 \mu\text{T}) \quad (4)$$

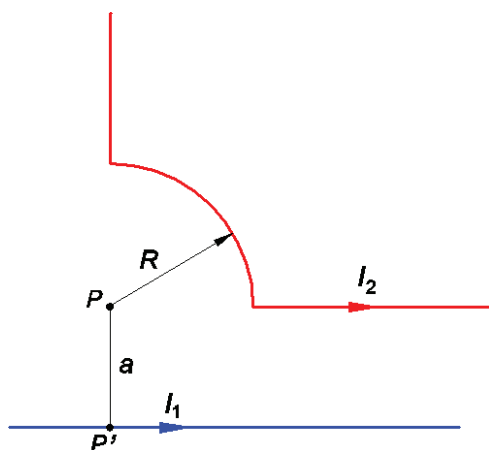
Rezultirajuća indukcija, prema (1), jest: $B = 165,66 \mu\text{T}$.



Primjer 15.2.11.

Beskonačno dugim, ravnim vodičem teče struja jakosti I_1 . Drugi, također beskonačno dugi vodič savijen je pod pravim kutom pomoću četvrtine strujne petlje i na udaljenosti a je od prvog vodiča, slika 1. Njime teče struja jakosti I_2 . Odredite iznos i smjer struje I_2 na način da je iznos indukcije u točki promatranja, zamišljeno središte kružne petlje, jednak nuli.

Podatci: $I_1 = 45 \text{ A}$, $a = 4R$.

Rješenje

Sl. 1. Sustav dva vodiča: ravnog i savinutog pod pravim kutom

Rezultirajuća indukcija može biti jednaka nuli u točki promatranja P samo ako su smjerovi struja u vodičima kao na slici 1. Indukcija B_1 u točki P uzrokovana strujom I_1 kroz beskonačno dugi ravni vodič, prema (8) primjera 15.2.1, jest:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \quad (1)$$

Doprinos indukcije B_2 u točki P daje samo dio kružne strujne petlje (nema doprinosa polubeskonačnih ravnih vodiča, v. primjer 15.2.9). Indukcija B_2 , prema (3) primjera 15.2.2, jest:

$$B_2 = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I_2}{2R} \quad (2)$$

Izjednačavanjem (1) i (2) dobije se:

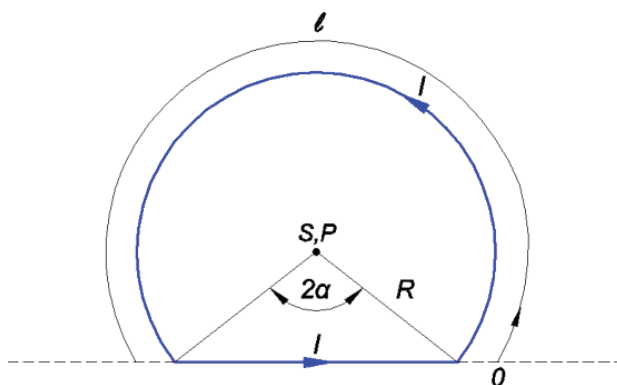
$$I_2 = \frac{4RI_1}{\pi a} \quad (= 14,32 \text{ A}) \quad (3)$$



Primjer 15.2.12.

Strujnu petlju čini dio zakrivljenog vodiča radijusa R , a dio je ravni vodič-tetiva kružnice srednjeg kuta 2α . Odredite indukciju B u središtu petlje ako vodičem teče struja konstantnog iznosa I .

Podatci: $I = 25 \text{ A}$, $R = 0,3 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$.

Rješenje

Sl. 1. Strujna je petlja dio kružnice $(2\pi - 2\alpha)$, a dio je pravac

Smjer vektora magnetske indukcije petlje prikazane na slici 1, a u njezinu je središtu okomita na površinu omeđenu petljom i "izlazi iz papira". Budući da su smjerovi indukcije i zakrivljenog i ravnog vodiča u središtu isti, slijedi da vektorski zbroj prelazi u algebarski:

$$B = B_k + B_v \quad (1)$$

gdje je:

$$B_k = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{l=2R(\pi-\alpha)} \frac{dl}{R^2} \quad (2)$$

indukcija zakrivljenog vodiča radijusa R , prema (6) primjera 15.2.1,

$$l = 2R(\pi - \alpha) \quad (3)$$

luk, dio kružnice radijusa R ,

$$B_v = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \quad (4)$$

indukcija ravnog vodiča konačne duljine, prema (2) primjera 15.2.5,

$$\varphi_1 = +\alpha \quad (5a)$$

$$\varphi_2 = +\alpha \quad (5b)$$

kutovi po kojima se vidi vodič konačne duljine iz točke promatranja P .

Integriranjem (2) dobije se:

$$B_k = \frac{\mu_0 I (\pi - \alpha)}{2\pi R} \quad (= 34,906 \mu\text{T}) \quad (6)$$

Uvrštavanjem zadanog kuta $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \alpha$ u (4) dobije se:

$$B_v = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi R} \quad (= 14,43 \mu\text{T}) \quad (7)$$

Rezultirajuća indukcija, prema (1), jest: $B = 49,339 \mu\text{T}$.

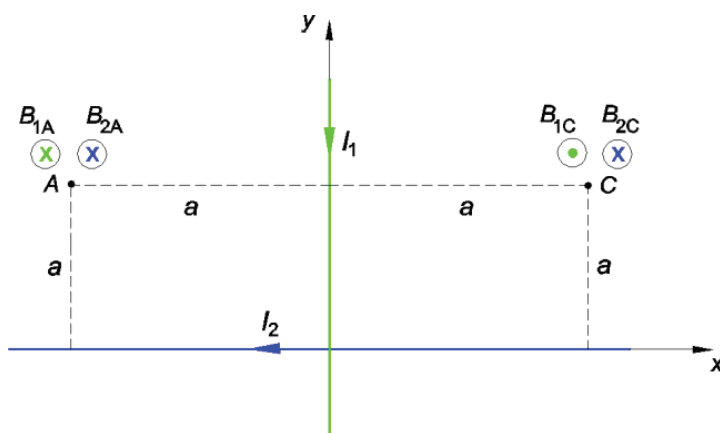


Primjer 15.2.13.

Kroz dva ravna, beskonačno duga vodiča teku struje I_1 i I_2 . Vodiči se sijeku pod pravim kutom. Odredite rezultirajuću indukciju u točkama A i C koje su od vodiča udaljene za a . Točke i vodič leže u istoj ravnini.

Podatci: $I_1 = I_2 = I = 50 \text{ A}$, $a = 25 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Vodiči i točke A i C leže u istoj ravnini

Magnetske linije ravnog, beskonačno dugog vodiča kružnice su s ishodištem u osi vodiča. Budući da vodiči i točke promatranja A i C leže u istoj ravnini, magnetske linije “ulaze“ ili “izlaze“ iz papira. Slijedi, vektorski zbroj/razlika magnetskih indukcija u točkama promatranja prelaze u algebarski zbroj/razliku.

Indukcija beskonačno dugog ravnog vodiča, kojim teče struja jakosti I , na udaljenosti a , prema (8) primjera 15.2.1, jest:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (1)$$

Indukcija u točki A : Indukcija B_{1A} i B_{2A} jednake su po iznosu i smjeru pa vektorski zbroj prelazi u algebarski.

$$B_A = B_{1A} + B_{2A} = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (= 0,8 \mu\text{T})$$

Indukcija u točki C : Indukcija B_{1C} i B_{2C} jednake su po iznosu i suprotne po smjeru pa je rezultirajuća indukcija jednaka nuli.



16. SILA I RAD NA VODIČ KOJIM TEČE STRUJA U MAGNETSKOM POLJU

Sila na vodič kojim teče struja u magnetskom polju jest sila na naboj u gibanju u tom istom polju. Sila na naboj u gibanju, ako ne postoji elektrostatičko polje, prema (14.2), jest:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (16.1)$$

gdje je:

- \vec{F}_m - magnetska sila (N)
- q - naboj (As)
- v - brzina gibanja naboja (m/s)
- B - magnetska indukcija (T).

Sila na ravni vodič u homogenom magnetskom polju, prema (23.6), jest:

$$\vec{F}_m = I(\vec{L} \times \vec{B}) \quad (16.2)$$

gdje je:

- I - struja vodiča (A)
- \vec{L} - duljina vodiča (m) čije je vektorsko značenje definirano smjerom struje
- \vec{B} - magnetska indukcija (T).

Rad i energija: Rad po definiciji, najopćenitije, jest djelovanje sile na putu. Slijedi, izvršeni rad jest umnožak sile i puta na kojem ta sila djeluje. Prema (23.11) jest:

$$A = \int_{dl} \vec{F}_m d\vec{l} \quad (16.3)$$

gdje je:

- $d\vec{l}$ - element puta (m).

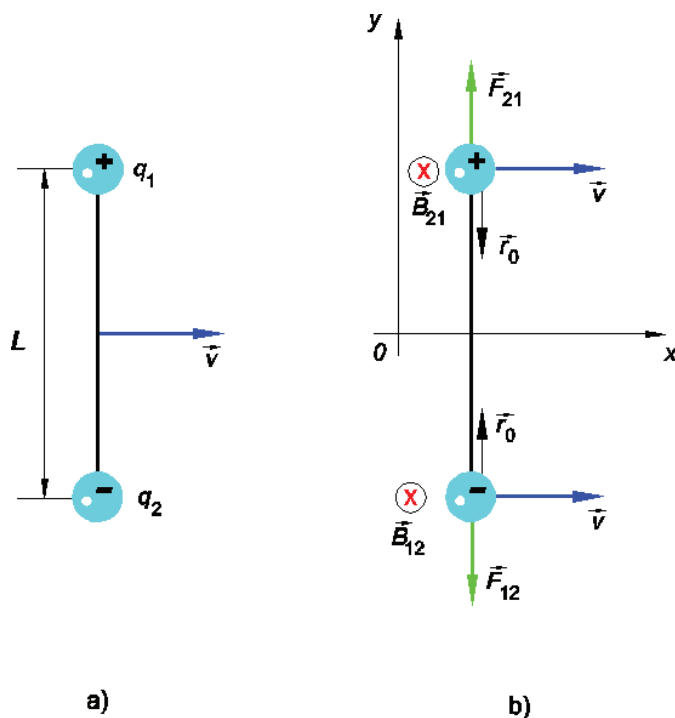
Uvrštavanjem (16.2) u (16.3) dobije se:

$$A = \int_{dl} I(\vec{L} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (16.4)$$

Energija: Sposobnost tijela da izvrši rad.

Primjer 16.1.

Štap duljine L giba se translatorno brzinom \vec{v} duž osi x u ravnini $z = 0$. Štap ima dva stupnja slobode gibanja: rotaciju i gibanje okomito na smjer brzine. Ako su na krajevima štapa naboji q_1 i q_2 , pri čemu je $q_1 = -q_2 = q$, odredite elektromagnetsku silu na naboje u gibanju. Također odgovorite hoće li doći do rotacije (spreg sila) ili pomaka štapa duž osi vodiča.

Rješenje

Sl. 1. Štap duljine L giba se translatorno brzinom \vec{v} i nosi naboje $\pm q$ a) i smjerovi indukcije \vec{B} na mjestima naboja b)

Sila na naboj u gibanju, prema (16.1), jest:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Indukcija B , što je stvarna naboj q_1 na mjestu naboja q_2 i obrnuto, izračunat će se uporabom Biot-Savartova zakona (15.3):

$$d\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (2)$$

gdje je:

B_{21} indukcija što je stvarna naboj q_2 u gibanju na mjesto naboja q_1 .

Element struje $I d\vec{l}$ u (2) može se izraziti kao:

$$I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \vec{v} \quad (3)$$

gdje je:

$dl = dx$ - element puta (m).

Uvrštavanjem (2) u (3) dobije se:

$$d\vec{B}_{21} = \mu_0 \frac{dq}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}_0}{L^2}$$

gdje je:

$r = L$ - udaljenost među nabojima (m)

\vec{r}_0 - jedinični vektor koji je usmjeren od jednog naboja prema drugom.

Integriranjem dobije se:

$$\vec{B}_{21} = \mu_0 \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}_0}{L^2} \quad (4)$$

Iz slike 1b također je vidljivo da vektori \vec{v} i \vec{r}_0 zatvaraju pravi kut pa jednačba (4), indukcija što je stvara naboj q_2 na mjestu naboja q_1 , jest:

$$\vec{B}_{21} = \mu_0 \frac{qv}{4\pi L^2} (-\vec{e}_z) \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) u (16.1) dobije se sila na naboj $q_1 = +q$:

$$\vec{F}_{21} = \mu_0 \frac{q^2 v^2}{4\pi L^2} (\vec{e}_x \times (-\vec{e}_z)) \quad (6)$$

ili u obliku:

$$\vec{F}_{21} = \mu_0 \frac{q^2 v^2}{4\pi L^2} \vec{e}_y \quad (7)$$

Sila na naboj, $q_2 = -q$, prema istom obrascu jest:

$$\vec{F}_{12} = \mu_0 \frac{q^2 v^2}{4\pi L^2} (-\vec{e}_y) \quad (8)$$

gdje su \vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} sile prvog naboja na drugi i obrnuto.

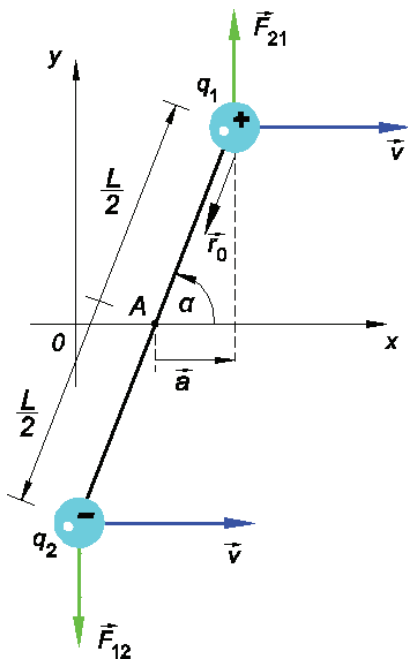
Sile \vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} po iznosu su jednake i suprotne po smjeru pa je njihov zbroj jednak nuli. Slijedi, štap duljine L zadržat će translatorno gibanje duž osi x .



Primjer 16.2.

Ako štap iz prethodnog zadatka zatvara kut α prema osi $+x$, slika 1, odredite moment (spreg sila) koji djeluje na njega.

Rješenje



Sl. 1. Na štap će djelovati spreg sila: $\vec{M} = \vec{F}_{21} \times \vec{a}$

Moment sila \vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} na štap duljine L jest:

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}_{21} + \vec{a} \times \vec{F}_{12} \quad (1)$$

gdje je:

\vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} sila prvog naboja na drugi i obrnuto, definirana s (16.1) odnosno (16.2),

$$\vec{a} = \frac{L}{2} \cos \alpha \vec{e}_x + \frac{L}{2} \sin \alpha \vec{e}_y \quad (2)$$

krak sile s obzirom na točku A , slika 1.

Budući da su sile \vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} jednake po iznosu i suprotne po smjeru, jednačba (1) postaje:

$$\vec{M} = 2\vec{F}_{21} \times \vec{a} \quad (3)$$

Određuje se indukcija što je stvara naboj q_2 u gibanju na mjesto naboja q_1 .

Prema (4) primjera 16.1 tražena indukcija jest:

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}_0}{L^2} \quad (4)$$

Budući da vektori \vec{v} i \vec{r}_0 zatvaraju kut od $180^\circ - \alpha$, jednačba (4) postaje:

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{v \sin \alpha}{L^2} (-\vec{e}_z) \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) u 16.1 dobije se:

$$\vec{F}_{21} = \mu_0 \frac{q^2 v^2 \sin \alpha}{4\pi L^2} \vec{e}_y \quad (6)$$

Uvrštavanjem (2) i (6) u (3) dobije se:

$$\vec{M} = 2 \frac{\mu_0 q^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{8\pi L} (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \quad (7)$$

ili u obliku:

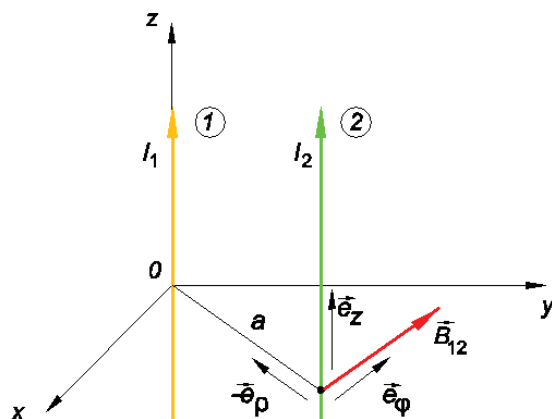
$$\vec{M} = \frac{\mu_0 q^2 v^2 \sin 2\alpha}{8\pi L} \vec{e}_z \quad (8)$$



Primjer 16.3.

Kroz dva usporedna, ravna, beskonačno duga vodiča teku struje I_1 i I_2 u istom smjeru. Odredite silu po jedinici duljine, po iznosu i smjeru.

Podatci: $I_1 = 75 \text{ A}$, $I_2 = 100 \text{ A}$, $a = 0,2 \text{ m}$.

Rješenje

Sl. 1. Vodič kojim teče struja I_2 nalazi se u polju indukcije \vec{B}_{12} prvog vodiča

Sila na vodič u magnetskom polju kojim teče struja, prema (16.2), jest:

$$\vec{F}_{12} = I_2 (\vec{L}_2 \times \vec{B}_{12}) \quad (1)$$

gdje je:

I_2 - struja drugog vodiča (A)

L_2 - duljina drugog vodiča (m)

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

indukcija što je stvarna struja prvog vodiča na mjestu drugog vodiča.

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} L_2 (\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi) \quad (3)$$

Vektorski umnožak $\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi$ daje smjer $-\vec{e}_\rho$. Jednadžba (3) postaje:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} L_2 \vec{e}_\rho \quad (4)$$

Dijeljenjem (4) s duljinom L_2 dobije se sila po jedinici duljine:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{L_2} = \vec{f}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \vec{e}_\rho \quad (= -7,5 \vec{e}_\rho \text{ mN/m}) \quad (5)$$

Predznak minus govori o privlačnoj sili među vodičima.



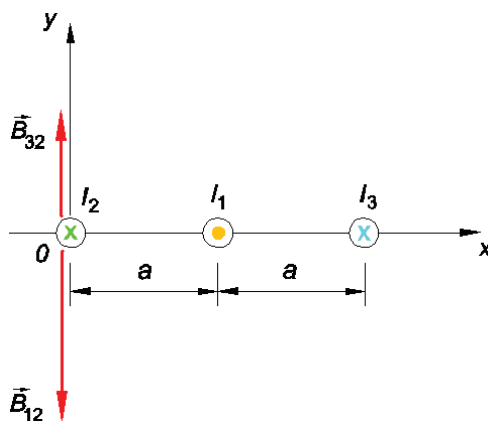
Primjer 16.4.

Trofazni vod čine tri vodiča. Vodiči leže u istoj ravnini i međusobno su paralelni, slika 1. Odredite silu na vodič br. 2 po jedinici duljine.

Podatci: $I_1 = 600 \text{ A}$, $I_2 = I_3 = -300 \text{ A}$ u promatranom trenutku vremena, $a = 0,15 \text{ m}$.

Napomena: Predznak struje „minus“, znači da struje I_2 i I_3 u trenutku promatranja teku suprotno struji I_1 .

Rješenje



Sl. 1. Tri vodiča čine trofazni vod

Sila što je stvaraju vodiči 1 i 3 na vodič 2, prema (16.2), jest:

$$\vec{F} = I_2 (\vec{L}_2 \times (\vec{B}_{12} + \vec{B}_{32})) \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} (-\vec{e}_y) \quad (2)$$

magnetska indukcija vodiča 1 na mjestu vodiča 2,

$$\vec{B}_{32} = \frac{\mu_0 I_3}{4\pi a} \vec{e}_y \quad (3)$$

magnetska indukcija vodiča 3 na mjestu vodiča 2,

$$\vec{L}_2 = L_2 (-\vec{e}_z) \quad (4)$$

vektor duljine vodiča 2, sa smjerom u smjeru struje, suprotnim osi aplikata.

Uvrštavanjem (2), (3) i (4) u (1) dobije se:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_2 L_2}{2\pi a} \left(-\vec{e}_z \times \left(-I_1 + \frac{1}{2} I_3 \right) \vec{e}_y \right) \quad (5)$$

Sila po jedinici duljine, nakon sređivanja (5), jest:

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \left(-I_1 + \frac{1}{2} I_3 \right) \vec{e}_x \quad (= -180 \vec{e}_x \text{ mN/m}) \quad (6)$$

Predznak minus ukazuje da je sila usmjerena suprotno od apcisne osi.

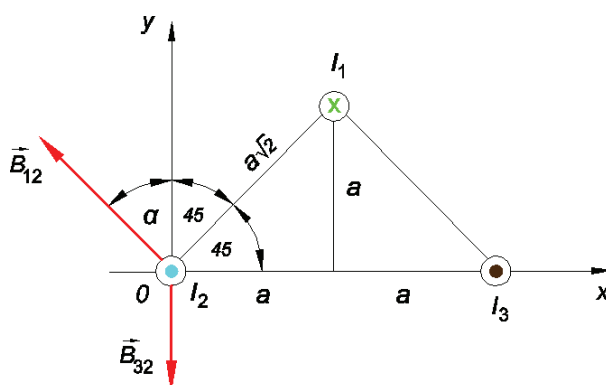


Primjer 16.5.

Trofazni vod čine tri vodiča. Vodiči su međusobno paralelni i smješteni su na način da presjeci vodiča s ravninom okomitom na njih leže u vrhovima istostraničnog trokuta, slika 1. Odredite silu na vodič br. 2 po jedinici duljine. Podatci: $I_1 = 250 \text{ A}$, $I_2 = I_3 = -125 \text{ A}$, $a = 0,15 \text{ m}$.

Napomena: Predznak struje „minus“, znači da struje I_2 i I_3 u trenutku promatranja teku suprotno struji I_1 .

Rješenje



Sl. 1. Tri vodiča čine trofazni vod

Sila što je stvaraju vodiči 1 i 3 na vodič 2, prema (16.2), jest:

$$\vec{F} = I_2 [\vec{L}_2 \times (\vec{B}_{12} + \vec{B}_{32})] \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a \sqrt{2}} (\cos \alpha \vec{e}_y - \sin \alpha \vec{e}_x) \quad (2)$$

magnetska indukcija vodiča 1 na mjestu vodiča 2,

$$\vec{B}_{32} = \frac{\mu_0 I_3}{4\pi a} (-\vec{e}_y) \quad (3)$$

magnetska indukcija vodiča 3 na mjestu vodiča 2,

$$\vec{L}_2 = L_2 \vec{e}_z \quad (4)$$

vektor duljine vodiča 2, sa smjerom osi aplikate,

α kut što ga zatvara vektor indukcije \vec{B}_{12} s osi ordinata ($= 45^\circ$).

Budući da je $\alpha = 45^\circ$, jednažba (2) postaje:

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a} (\vec{e}_y - \vec{e}_x) \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) i (3) u (1) dobije se:

$$\vec{F} = I_2 \left[L_2 \vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a} (\vec{e}_y - \vec{e}_x) + L_2 \vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I_3}{4\pi a} (-\vec{e}_y) \right] \quad (6)$$

Sila po jedinici duljine uz $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$, $\vec{e}_z \times (-\vec{e}_x) = -\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z \times (-\vec{e}_y) = \vec{e}_x$ jest:

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi a} [(I_3 - I_1) \vec{e}_x - I_1 \vec{e}_y] \quad (7)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobije se:

$$\vec{f} = -10,41(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \text{ mN/m} \quad (8)$$

iznosa: $f = 23,28 \text{ mN/m}$.

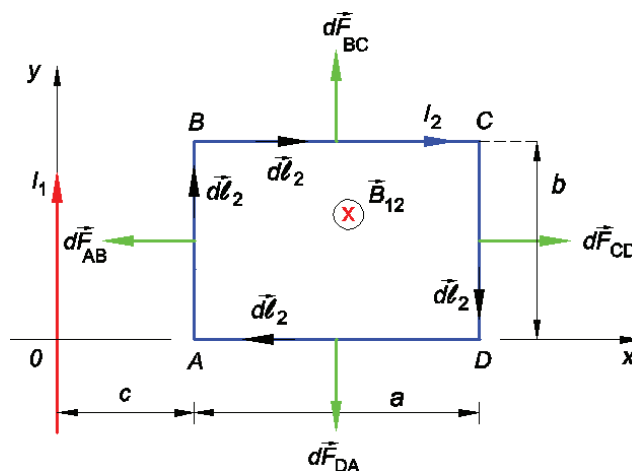


Primjer 16.6.

Pravokutna petlja, dimenzija $a \times b$, i beskonačno dugi, ravni vodič leže u istoj ravnini, slika 1. Vodičem teče struja I_1 , a petljom I_2 . Izračunajte silu vodiča na petlju. Stranice petlje AD i BC okomite su na ravni vodič dok su stranice AB i CD paralelne s njime.

Podatci: $I_1 = 50 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $b = c = 0,2 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Pravokutna strujna petlja nalazi se u nehomogenom magnetskom polju

Sila na element vodiča $d\vec{l}_2$ pravokutne strujne petlje, petlja se nalazi u nehomogenom magnetskom polju \vec{B}_{12} , prema (16.2), jest:

$$d\vec{F} = I_2(d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}) \quad (1)$$

gdje je:

I_2 - struja koja teče strujnom petljom

$d\vec{l}_2$ - element duljine petlje

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{e}_z)^* \quad (2)$$

indukcija na mjestu elementa $d\vec{l}_2$ što je stvara struja ravnog vodiča I_1 .

Vektorski umnožak dvaju međusobno okomitih vektora, $d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$, daje smjer djelovanja sile $d\vec{F}$, slika 1. Iz smjerova sila na slici 1 zaključuje se da su sile $d\vec{F}_{BC}$ i $d\vec{F}_{DA}$ na istoj udaljenosti od ravnog vodiča jednake po iznosu i suprotne po smjeru. Slijedi, rezultirajuće sile na stranicama AD i CB ne pridonose pomaku strujne petlje, nego samo njezinoj deformaciji. Svi elementi $d\vec{l}_2$ stranica AB i CD strujne petlje nalaze se u magnetskom polju konstantne indukcije pa jednačba (1) postaje:

Sila na stranicu AB petlje:

$$\vec{F}_{AB} = I_2 \left[b\vec{e}_y \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} (-\vec{e}_z) \right] \quad (3a)$$

$$\vec{F}_{AB} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi c} \vec{e}_x \quad (3b)$$

Sila na stranicu CD petlje:

$$\vec{F}_{CD} = I_2 \left[b(-\vec{e}_y) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c+a)} (-\vec{e}_z) \right] \quad (4a)$$

$$\vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(c+a)} \vec{e}_x \quad (4b)$$

* Linija magnetskog polja ravnog vodiča protjecanog strujom I ima φ komponentu: \vec{e}_φ .

Međutim, u ravnini $z = 0$ jedinični vektor \vec{e}_φ kolinearan/suprotan je \vec{e}_z .

Rezultirajuća sila na petlju vektorski je zbroj sila \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{CD} . Budući da su sile \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{CD} suprotne, umjesto vektorskog zbroja imamo algebarski zbroj (rezultantna sila djeluje u $-x$ smjeru):

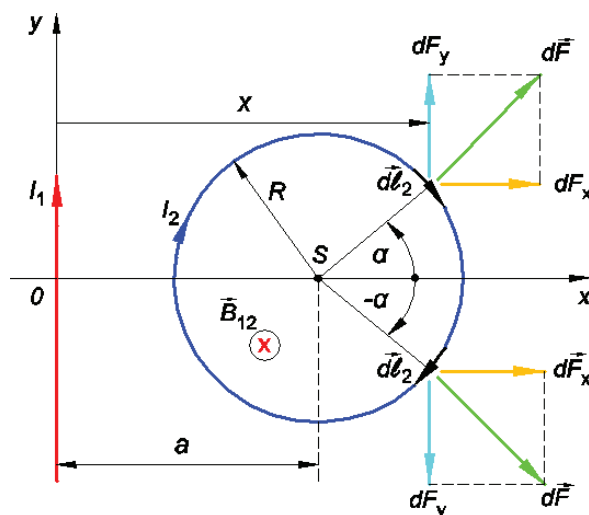
$$F = F_{AB} - F_{CD} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi(c+a)c} \quad (= -12 \mu\text{N}) \quad (5)$$



Primjer 16.7.

Kružna petlja, radiusa R , i beskonačno dugi, ravni vodič leže u istoj ravnini, slika 1. Vodičem teče struja I_1 a petljom I_2 . Izračunajte silu vodiča na petlju. Podatci: $I_1 = 50 \text{ A}$, $I_2 = 40 \text{ A}$, $R = 0,2 \text{ m}$, $a = 0,3 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Kružna petlja nalazi se u nehomogenom magnetskom polju

Sila na element vodiča $d\vec{l}_2$ kružne strujne petlje, petlja se nalazi u nehomogenom magnetskom polju indukcije \vec{B}_{12} , prema (16.2), jest:

$$d\vec{F} = I_2 (d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}) \quad (1)$$

gdje je:

I_2 - struja koja teče strujnom petljom

$d\vec{l}_2$ - element duljine petlje

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} (-\vec{e}_z) \quad (2)$$

indukcija na mjestu elementa $d\vec{l}_2$ od ravnog vodiča

$$x = a + R \cos \alpha \quad (3)$$

udaljenost elementa $d\vec{l}_2$ od ravnog vodiča.

Vektorski umnožak $d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$ umnožak je dvaju okomitih vektora čiji je smjer radijalni u svakoj točki kružne petlje, slika 1 što je ujedno, prema (1), i smjer sile $d\vec{F}$. Sila $d\vec{F}$ u svakoj točki kružne petlje može se rastaviti na dvije komponente: $d\vec{F}_x$ i $d\vec{F}_y$. Iz slike 1 vidljivo je, kao i u prethodnom zadatku, da se y komponente sile $d\vec{F}$ koje djeluju na element $d\vec{l}_2$ smještene zrcalno s obzirom na apscisnu os međusobno poništavaju, a x komponente sile međusobno zbrajaju:

$$dF_x = dF \cos \alpha = I_2 dl_2 B_{12} \cos \alpha \quad (4)$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (4) dobije se:

$$dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dl_2 \cos \alpha}{a + R \cos \alpha} \quad (5)$$

gdje je:

$$dl_2 = R d\alpha \quad (6)$$

element kružne petlje koji se vidi pod kutom $d\alpha$ iz središta kružnice.

$$dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{a + R \cos \alpha} \quad (7)$$

Integriranjem (7) po kutu $\alpha[0, 2\pi]$ dobije se ukupna sila.

$$F = F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{a + R \cos \alpha} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{a + R \cos \alpha} \quad (8)$$

Napomena:

Rješenje integrala (8) prema matematičkom priručniku Bronštejn-Semendjajev, jest:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ax dx}{b + c \cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c \cos a} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \cdot \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-c)\operatorname{tg} \frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2 - c^2}}$$

Za $b^2 > c^2$.

Integriranje (8) daje:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} \left[\frac{\alpha}{R} - \frac{a}{R} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 - R^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-R)\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{a^2 - R^2}} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=+\pi}$$

Budući da je po $\operatorname{arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$ gornja granica i $\operatorname{arctg}(0) = 0$ donja granica, rezultirajuća sila na kružnu petlju jest:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} \left[\frac{\pi}{R} - \frac{a}{R} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 - R^2}} \frac{\pi}{2} \right]$$

Sređivanjem dobije se:

$$F = \mu_0 I_1 I_2 \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - R^2}} \right] \quad (= -0,86 \text{ mN}) \quad (9)$$

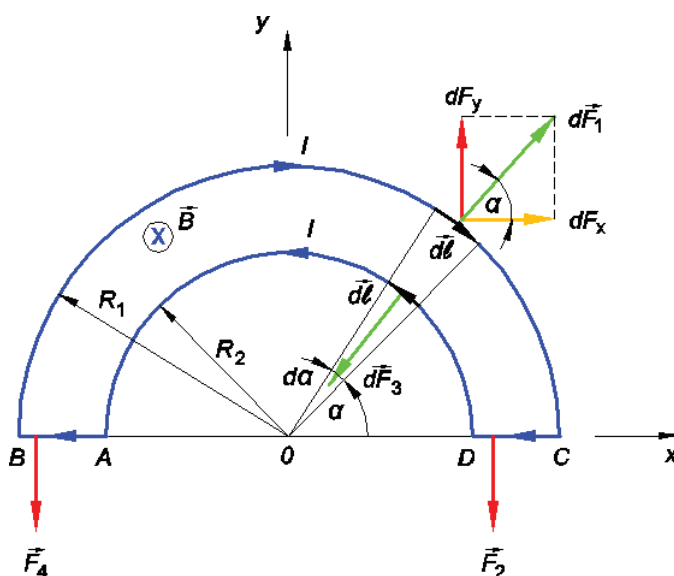


Primjer 16.8.

Petlja polukružnog oblika, slika 1, nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Indukcija \vec{B} okomita je na površinu omeđenu strujnom petljom. Odredite silu na petlju po iznosu i smjeru ako petljom teče struja konstantne jakosti I .

Podatci: $I = 5 \text{ A}$, $R_1 = 0,3 \text{ m}$, $R_2 = 0,2 \text{ m}$, $B = 1,2 \text{ T}$.

Rješenje



Sl. 1. Polukružna petlja nalazi se u homogenom magnetskom polju

Sila na vodič kojim teče struja jakosti I u magnetskom polju indukcije \vec{B} , prema (16.2), jest:

$$d\vec{F} = I_2(d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}) \quad (1)$$

Rezultirajuća sila na polukružnu petlju jednaka je zbroju sila:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \quad (2)$$

Sile \vec{F}_1 i \vec{F}_3 sile su radijalnog smjera i mogu se rastaviti na dvije međusobno okomite komponente: $d\vec{F}_x$ i $d\vec{F}_y$. Za α i $\alpha + \pi/2$ radijalne sile jednake su po iznosu, ali ne i po smjeru. Međutim, njihove x komponente jednake su po iznosu i suprotne po smjeru te se međusobno poništavaju. Ostaje samo y komponenta:

Slijedi, sve su sile kolinearne ili suprotne pa vektorski zbroj prelazi u algebarski:

$$F = F_{1y} - F_2 - F_{3y} - F_4 \quad (3)$$

Određuju se pojedine sile.

Sila \vec{F}_{1y} :

gdje je:

$$d\vec{F}_1 = I(d\vec{l}_1 \times \vec{B}) \quad (4)$$

sila na vanjski dio strujne petlje

$$d\vec{l}_1 = R_1 d\alpha (-\vec{e}_\alpha) \quad (5)$$

element strujne petlje na radijusu R_1 .

Uvrštavanjem (5) u (4) dobije se:

$$d\vec{F}_1 = IR_1 B [d\alpha (-\vec{e}_\alpha) \times (-\vec{e}_z)] \quad (6)$$

Nakon vektorskog umnoška jediničnih vektora dobije se:

$$d\vec{F}_1 = IR_1 B d\alpha \vec{e}_r \quad (7)$$

Ipsilon komponenta jest:

$$dF_{1y} = dF_1 \sin \alpha = IR_1 B \sin \alpha d\alpha \quad (8)$$

Integriranjem, u intervalu $\alpha[0, \pi]$, dobije se:

$$F_{1y} = 2IR_1 B \quad (= 3,6 \text{ N}) \quad (9)$$

Sile \vec{F}_2 i \vec{F}_4 : Ove sile jednake su po iznosu i smjeru. Prema (1) dobije se:

$$F_2 = F_4 = IL_2 B \sin 90^\circ \quad (= 0,6 \text{ N}) \quad (10)$$

gdje je:

$$L_2 = R_1 - R_2 \quad (= 0,1 \text{ m}) \quad (11)$$

duljina strujne petlje CD odnosno AB .

Sila \vec{F}_{3y} : Ova sila određuje se jednakim postupkom kao i sila \vec{F}_{1y} s tim da se umjesto na radijusu R_1 sila određuje na radijusu R_2 .

$$F_{3y} = 2IR_2B \quad (= 2,4\text{N}) \quad (12)$$

Uvrštavanjem (8), (10) i (12) u (3) dobije se:

$$F = 0\text{N}$$

Zaključak: Nema sile na strujnu petlju. Strujna je petlja u stanju mirovanja s tendencijom njezina deformiranja.

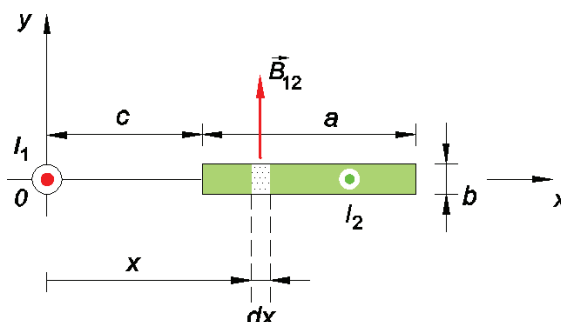


Primjer 16.9.

Metalna traka pravokutnog presjeka i beskonačno duga leži u istoj ravnini s beskonačno dugim, ravnim vodičem i s njim je paralelna. Ako vodičem i trakom teku struje I_1 i I_2 istog smjera, odredite silu po jedinici duljine među njima.

Podatci: $I_1 = 50\text{ A}$, $I_2 = 600\text{ A}$, $a = 50\text{ mm}$, $b = 2,5\text{ mm}$, $c = 75\text{ mm}$.

Rješenje



Sl. 1. Ravni vodič i traka leže u istoj ravnini i međusobno su paralelni

Sila između vodiča i trake odredit će se na način da se odredi sila između struje I_1 i kvazilinijske struje I_{2x} metalne trake. Prema (16.2) dobije se:

$$d\vec{F} = I_{2x}(\vec{L}_2 \times \vec{B}_{12}) \quad (1)$$

gdje je:

$$I_{2x} = J_2 b dx \quad (2)$$

kvazilinijska struja metalne trake

$$J_2 = \frac{I_2}{ab} \quad (3)$$

gustoća struje metalne trake

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e}_y \quad (4)$$

indukcija struje I_1 na mjestu kvazistruje I_{2x}

$$\vec{L}_2 = L_2 \vec{e}_z \quad (5)$$

duljina trake.

Uvrštavanjem (2), (4) i (5) u (1) dobije se:

$$d\vec{F} = J_2 b dx (L_2 \vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e}_y) \quad (6)$$

Uz $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$ sila po jedinici duljine, jednadžba (6), postaje:

$$d\vec{f} = -\frac{\mu_0 I_1 J_2 b}{2\pi} \frac{dx}{x} \vec{e}_x \quad (7)$$

Sila je, prema očekivanju, vidi primjer 13.6, privlačna. Iznos rezultirajuće sile dobije se integracijom u granicama (c , $c+a$):

$$f = \frac{\mu_0 I_1 J_2 b}{2\pi} \ln x \Big|_c^{c+a} \quad (8)$$

Uvrštavanjem granica, te zamjena gustoće struje J_2 (3), dobije se:

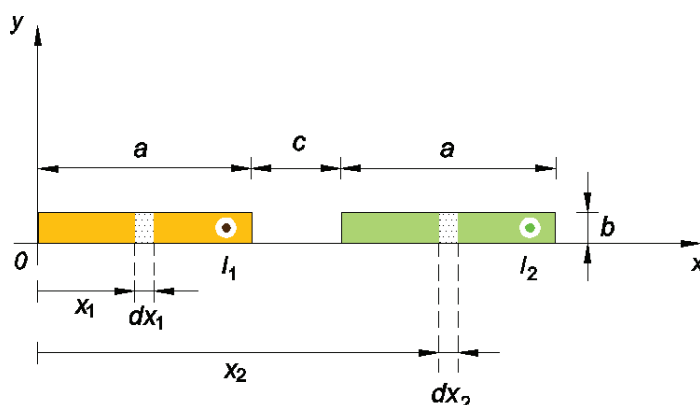
$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ln \frac{c+a}{c} \quad (= 61,3 \text{ mN}) \quad (9)$$



Primjer 16.10.

Dvije ravne, beskonačno duge trake dimenzija $a \times b$ leže u istoj ravnini i međusobno su pomaknute za c , slika 1. Trakama teku struje I_1 i I_2 . Odredite silu po jedinici duljine među trakama ako njima teku struje u istom smjeru. Podatci: $I_1 = 450 \text{ A}$, $I_2 = 550 \text{ A}$, $a = 50 \text{ mm}$, $b = 2,5 \text{ mm}$, $c = 30 \text{ mm}$.

Rješenje



Sl. 1. Dvjestrakama teku struje u istom smjeru

Sila među kvazilinijskim strujama, prema (16.2), jest:

$$d\vec{F}_{12} = I_{2x}(\vec{L}_2 \times \vec{B}_{12}) \quad (1)$$

gdje je:

$$I_{1x} = J_1 b dx_1, \quad I_{2x} = J_2 b dx_2 \quad (2)$$

kvazilinijske struje prve odnosno druge trake

$$J_1 = \frac{I_1}{ab}, \quad J_2 = \frac{I_2}{ab} \quad (3)$$

gustoća struje svake od traka

$$\vec{L}_2 = L_2 \vec{e}_z \quad (4)$$

duljina trake

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_{1x}}{2\pi(x_2 - x_1)} \vec{e}_y \quad (5)$$

indukcija kvazilinijske struje I_{1x} na mjestu struje I_{2x} .

Sila po jedinici duljine, prema (1), uz $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$, jest:

$$d\vec{f}_{12} = -\frac{\mu_0 J_1 J_2 b^2}{2\pi} \frac{dx_1 dx_2}{x_2 - x_1} \vec{e}_x \quad (6)$$

Integriranjem (6), iznos sile po jedinici duljine, jest:

$$f_{12} = K \int_0^a dx_1 \int_{a+c}^{2a+c} \frac{dx_2}{x_2 - x_1} \quad (7)$$

gdje je:

$$K = -\frac{\mu_0 J_1 J_2 b^2}{2\pi} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a^2} \quad (8)$$

Integriranjem po varijabli x_2 dobije se:

$$f_{12} = K \int_0^a dx_1 \ln(x_2 - x_1) \Big|_{a+c}^{2a+c}$$

Uvrštavanjem granica dobije se:

$$f_{12} = K \int_0^a [\ln(2a + c - x_1) - \ln(a + c - x_1)] dx_1 \quad (9)$$

Napomena:

Rješenje integrala (10), v. matematički priručnik Bronštejn-Semendjajev, jest:

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$$

Integriranjem (9) po varijabli x_1 dobije se:

$$f_{12} = K \left\{ (2a + c - x_1) [1 - \ln(2a + c - x_1)] - (a + c - x_1) [1 - \ln(a + c - x_1)] \right\}_0^a \quad (10)$$

Uvrštavanjem granica u (10) i konstante K dobije se:

$$f_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a^2} [(2a + c) \ln(2a + c) - 2(a + c) \ln(a + c) + c \ln c] \quad (11)$$

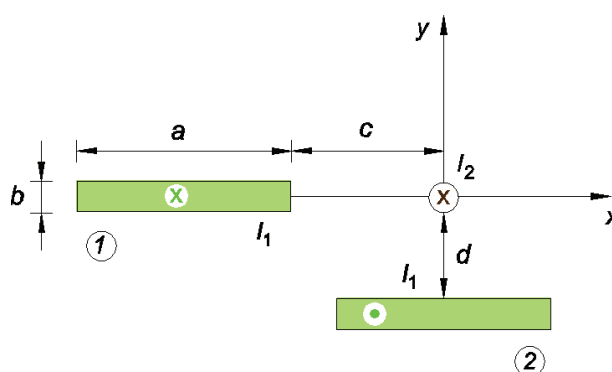
Iznos sile jest: $f = -0,669 \text{ N}$.



Primjer 16.11.

Dvije međusobno jednake metalne trake, pravokutnog presjeka i beskonačno duge čine električni vod. U ravnini prve trake i simetrali druge trake, slika 1, leži beskonačno dugi ravni vodič. Vodič i metalne trake međusobno su paralelni. Metalnim trakama teku struje I_1 , a vodičem I_2 . Odredite silu po jedinici duljine kojom vod djeluje na ravni vodič.

Podatci: $I_1 = 250\text{ A}$, $I_2 = 450\text{ A}$, $a = 50\text{ mm}$, $b = 2,5\text{ mm}$, $c = 50\text{ mm}$, $d = 50\text{ mm}$.

Rješenje

Sl. 1. Struje voda djeluju silom f na ravni vodič

Sila na ravni vodič kojim teče struja jakosti I_2 odredit će se metodom superpozicije:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{F}_1 = I_2(\vec{L}_2 \times \vec{B}_{11}) \quad (2)$$

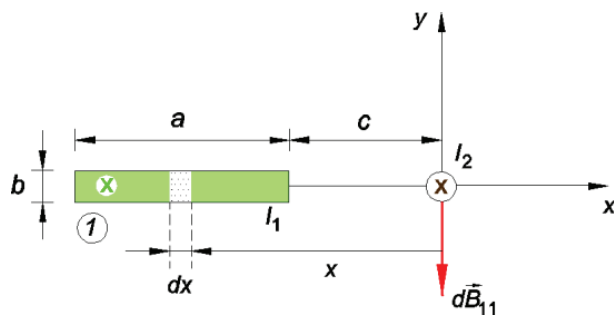
sila trake 1 na ravni vodič

$$\vec{F}_2 = I_2(\vec{L}_2 \times \vec{B}_{22}) \quad (3)$$

sila trake 2 na ravni vodič.

Izračunavanje pojedine sile svodi se na izračune indukcije \vec{B}_{11} i \vec{B}_{12} .

Indukcija \vec{B}_{11} :



Sl. 2. Indukcija dB_{11} što je stvara struja I_{1x} metalne trake na mjestu ravnog vodiča

Diferencijal indukcije dB_{11} na mjestu ravnog vodiča što je uzrokuje kvazilinijska struja I_{1x} prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$dB_{11} = \frac{\mu_0 I_{1x}}{2\pi x} \quad (4)$$

gdje je:

$$I_{1x} = Jbdx \quad (5)$$

kvazilinijska struja

$$J = \frac{I_1}{ab} \quad (6)$$

gustoća struje.

Uvrštavanjem (5) i (6) u (4) dobije se:

$$dB_{11} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \frac{dx}{x} \quad (7)$$

Linije indukcije što ih stvaraju kvazilinijske struje okomite su na ravninu $y = 0$, pa vektorski zbroj prelazi u analitički. Integriranjem (7) dobije se:

$$B_{11} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \ln x \Big|_{-c}^{-(c+a)}$$

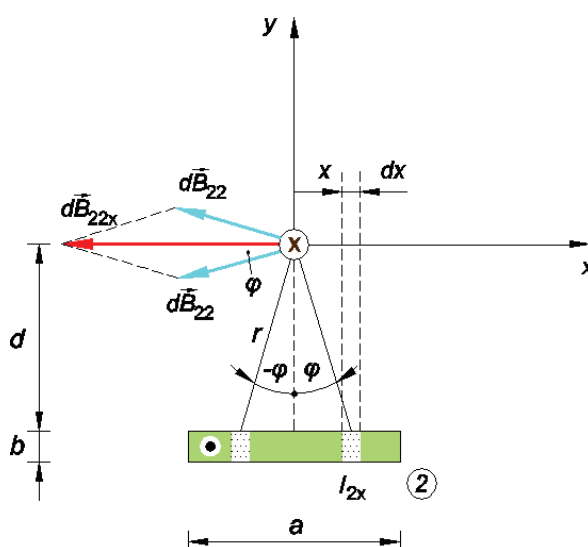
Uvrštavanjem granica dobije se:

$$B_{11} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \ln \frac{c+a}{c} \quad (8)$$

Vektor indukcije ima smjer negativne osi ordinate:

$$\vec{B}_{11} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \ln \frac{c+a}{c} \vec{e}_y \quad (9)$$

Indukcija \vec{B}_{22} :



Sl. 3. Indukcija dB_{22} što je stvara struja I_{2x} metalne trake na mjestu ravnog vodiča

Diferencijal indukcije dB_{22} na mjestu ravnog vodiča što ga stvara kvazilinijska struja I_{2x} prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$dB_{22} = \frac{\mu_0 I_{2x}}{2\pi r} \quad (10)$$

gdje je:

$$I_{2x} = J b dx = \frac{I_1}{a} dx \quad (11)$$

kvazilinijska struja

$$J = \frac{I_1}{ab} \quad (12)$$

gustoća struje

$$r = \frac{d}{\cos \varphi} \quad (13)$$

udaljenost kvazilinijske struje I_{2x} od ravnog vodiča.

Uvrštavanjem (11), (12) i (13) u (10) dobije se:

$$dB_{22} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi ad} \cos \varphi dx \quad (14)$$

Zbog simetrije metalne trake s obzirom na ravni vodič indukcija što je uzrokuju kvazilinijske struje za $\pm x$ ima samo x komponentu:

$$dB_{22x} = dB_{22} \cos \varphi \quad (15)$$

Uvrštavanjem (14) u (15) dobije se:

$$dB_{22x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi ad} \cos^2 \varphi dx \quad (16)$$

U (16) dvije su varijable: x i φ . Iz pravokutnog trokuta, slika 3, dobije se:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{d}, \quad dx = \frac{d}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad (17)$$

Uvrštavanjem (17) u (16) dobije se:

$$dB_{22x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} d\varphi$$

Iz ravnog vodiča vidi se metalna traka pod kutom $(-\varphi, +\varphi)$, gdje je:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a/2}{d} = \operatorname{arctg} \frac{a}{2d}$$

Integriranjem dobije se:

$$B_{22x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \varphi \Big|_{-\varphi}^{+\varphi} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi a} \varphi \quad (18)$$

Indukcija u vektorskom obliku jest:

$$\vec{B}_{22x} = -\frac{\mu_0 I_1}{\pi a} \varphi \vec{e}_x \quad (19)$$

Indukcije \vec{B}_{11} i \vec{B}_{22} okomite su na ravni vodič, vektorski umnožak prelazi u algebarski, a sile (2) i (3) po jedinici duljine, uz $\vec{L}_2 = -L_2 \vec{e}_z$, jest:

$$\vec{f}_{11} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ln \frac{c+a}{c} \vec{e}_x \quad (20)$$

$$\vec{f}_{22} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \varphi \vec{e}_y \quad (21)$$

Uvrštavanjem (20) i (21) u (1) dobije se:

$$\vec{f} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{c+a}{c} \vec{e}_x - \varphi \vec{e}_y \right] \quad (22)$$

Uvrštavanjem zadanih iznosa dobije se:

$$\vec{f} = -0,312 \vec{e}_x + 0,417 \vec{e}_y \text{ N}$$

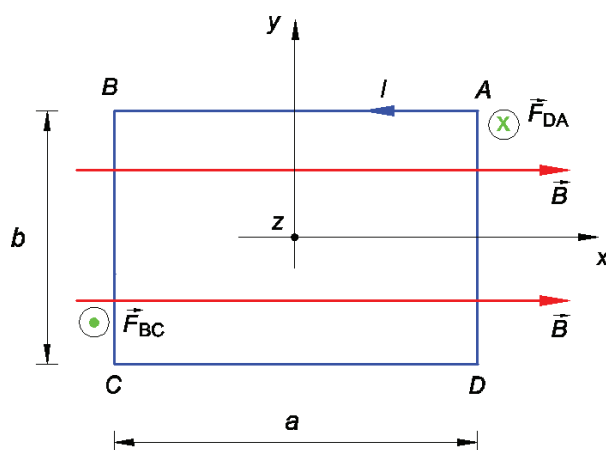


Primjer 16.12.

Petlja pravokutnog oblika, dimenzija $a \times b$, nalazi se u homogenom polju indukcije \vec{B} . Linije indukcije tangiraju površinu petlje, slika 1. Odredite moment sila magnetskog polja na strujnu petlju.

Podatci: $I = 5 \text{ A}$, $B = 1,2 \text{ T}$, $a = 0,6 \text{ m}$, $b = 0,3 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Pravokutna petlja protjecana strujom konstantne jakosti nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B}

Moment sile jest:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

gdje je:

r krak sile (m)

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B}) \quad (2)$$

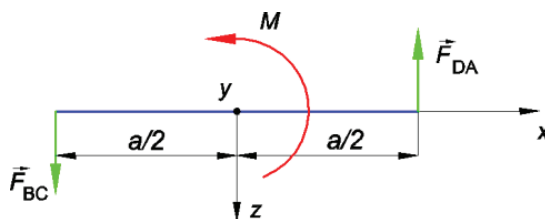
elektromagnetska sila (N), sila na ravni vodič kojim teče struja u homogenom magnetskom polju.

Dvije stranice petlje AB i CD zatvaraju kut od $-\pi$ i 0 s linijom polja indukcije \vec{B} , pa je i sila na tim stranicama jednaka nuli. Na preostale dvije stranice BC i DA navedene dužine okomite su na linije indukcije:

$$\vec{F}_{BC} = I[b(-\vec{e}_y) \times B\vec{e}_x] = IbB\vec{e}_z \quad (3)$$

$$\vec{F}_{DA} = I[b\vec{e}_y \times B\vec{e}_x] = -IbB\vec{e}_z \quad (4)$$

Sile \vec{F}_{BC} i \vec{F}_{DA} stvaraju na pravokutnu petlju spreg sile, slika 2.



Sl. 2. Sile \vec{F}_{BC} i \vec{F}_{DA} stvaraju moment sila na pravokutnu petlju

Navedene su sile jednake po iznosu i suprotne po smjeru, nalaze se na međusobnoj udaljenosti a i nastoje zaokrenuti strujnu petlju u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu:

$$\vec{M} = \frac{a}{2} \vec{e}_x \times F_{DA} (-\vec{e}_z) + \frac{a}{2} (-\vec{e}_x) \times F_{BC} \vec{e}_z \quad (5)$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} a F_{DA} [\vec{e}_x \times (-\vec{e}_z) + (-\vec{e}_x) \times \vec{e}_z]$$

Budući da je $\vec{e}_x \times (-\vec{e}_z) = (-\vec{e}_x) \times \vec{e}_z = \vec{e}_y$, posljednja jednadžba poprima oblik:

$$\vec{M} = a F_{DA} \vec{e}_y \quad (= 1,08 \text{ Nm}) \quad (6)$$

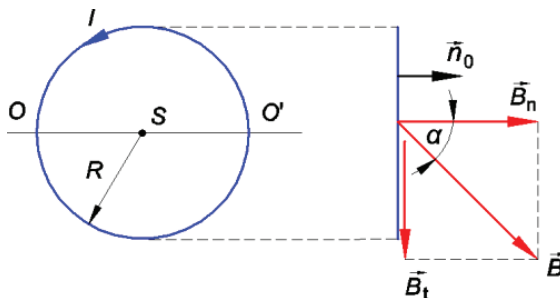


Primjer 16.13.

Petlja kružnog oblika, radijusa R , kojom teče struja jakosti I , nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Vektor magnetske indukcije i normala plohe S omeđene kružnom petljom zatvaraju međusobno kut α . Odredite zakretni moment petlje oko osi OO' .

Podatci: $I = 10 \text{ A}$, $B = 0,8 \text{ T}$, $R = 0,3 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$.

Rješenje



Sl. 1. Kružna petlja kojom teče struja jakosti I nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B}

Moment sile jest:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

gdje je:

r - krak sile (m)

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (2)$$

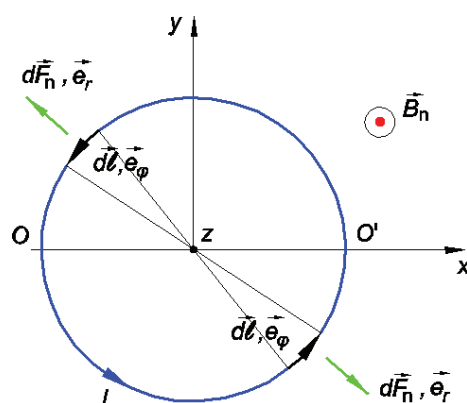
elektromagnetska sila (N), sila na vodič kojim teče struja u magnetskom polju.

Budući da vektor indukcije \vec{B} zatvara kut α s normalom plohe S , nužno ga je rastaviti na dvije komponente:

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t \quad (3)$$

gdje je:

\vec{B}_n , \vec{B}_t normalna, odnosno tangencijalna komponenta vektora indukcije.



Sl. 2. Sile na kružnu petlju koje uzrokuje normalna komponenta indukcije

Sila uzrokovana normalnom komponentom indukcije:

$$d\vec{F}_n = I(d\vec{l} \vec{e}_\varphi \times B_n \vec{e}_z)$$

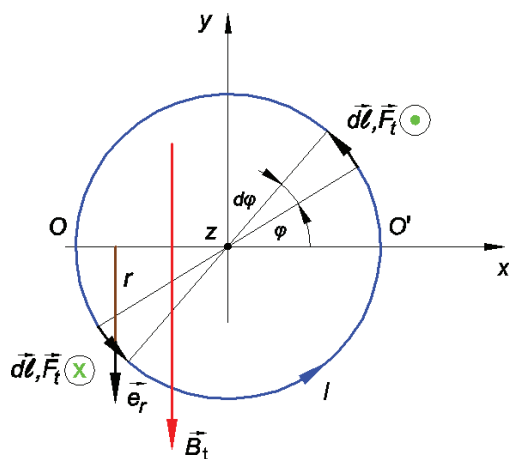
ili u obliku:

$$d\vec{F}_n = Idl B_n \vec{e}_r \quad (4)$$

Par sile na bilo koja dva elementa Idl petlje međusobno dijametralno smještena jednaka su po iznosu i suprotna po predznaku. Slijedi, ukupna

rezultirajuća sila jednaka je nuli. Ove sile imaju tendenciju širenja strujne petlje.

Sila uzrokovana tangencijalnom komponentom indukcije:



Sl. 3. Sile na kružnu petlju koje uzrokuje tangencijalna komponenta indukcije

$$d\vec{F}_t = I(d\vec{l} \times \vec{B}_t) = I[dl\vec{e}_\varphi \times B_t(-\vec{e}_y)]$$

ili uz:

$$\vec{e}_y = \vec{e}_r \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi$$

u obliku:

$$d\vec{F}_t = IdlB_t \sin \varphi \vec{e}_z \quad (5)$$

Ove sile stvarat će spreg sila na kružnu petlju.

Diferencijal para sila (moment) $\vec{F}_t(+\vec{e}_z)$ i $\vec{F}_t(-\vec{e}_z)$ na kraku \vec{r} , pri čemu je $\vec{r} = R\vec{e}_r$, prema slici 3 i (1) jest:

$$d\vec{M} = 2(R\vec{e}_r \times IdlB_t \sin \varphi \vec{e}_z) \quad (6)$$

ili uz:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi$$

u obliku:

$$d\vec{M} = 2RI dl B_t \sin \varphi (\vec{e}_x \sin \varphi - \vec{e}_y \cos \varphi) \quad (7)$$

gdje je:

$$dl = R d\varphi \quad (8)$$

element duljine kružne petlje (m).

$$B_t = B \sin \alpha \quad (9)$$

Uvrštavanjem (8) i (9) u (7) dobije se:

$$M = 2IR^2B \sin \alpha \left(\vec{e}_x \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi - \vec{e}_y \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right)$$

iznos momenata para sila.

Integriranjem dobije se:

$$M = IR^2B\pi \sin \alpha \quad (= 1,13 \text{ Nm}) \quad (10)$$

Napomena:

Integrali:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x$$



Primjer 16.14.

Vodljivom pravokutnom petljom dimenzija $D \times L$ teče struja konstantne jakosti I . Petlja se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije B . Odredite izvršeni rad ako se petlja zarotira za 180° oko osi OO' . Početni položaj petlje je takav da:

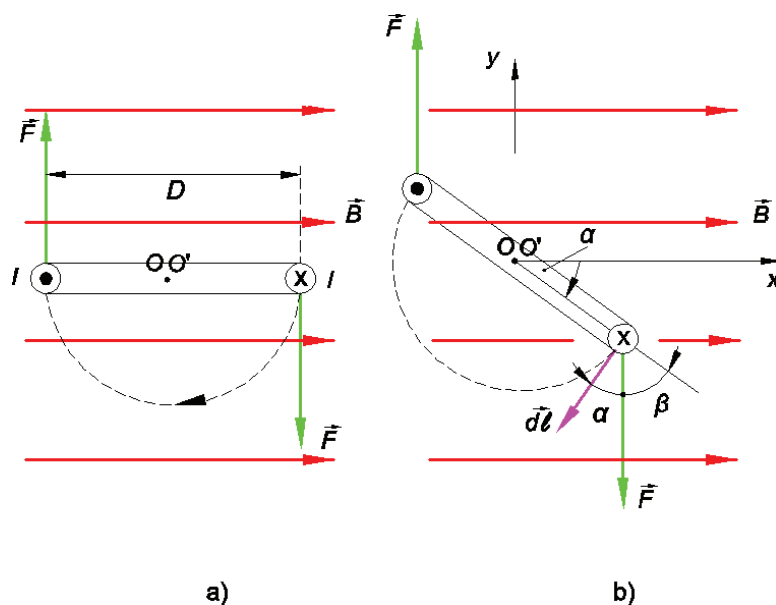
a) tangira linije indukcije B , slika 1a

b) okomit je na linije indukcije B , slika 2a.

Podatci: $B = 0,8 \text{ T}$, $D = 20 \text{ cm}$, $L = 30 \text{ cm}$, $I = 20 \text{ A}$.

Rješenje

a)

Sl. 1. Početni položaj strujne petlje a) i položaj nakon rotacije za kut α b)

Rad jest svladavanje sile na putu. Ako se petlja zarotira za kut $d\alpha$, tada je izvršeni rad:

$$dA = 2\vec{F}d\vec{l} = 2Fdl \cos \alpha \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B}) \quad (2)$$

sila na vodič duljine L (iznosa $= ILB$ jer su vektori \vec{L} i \vec{B} međusobno okomiti)

$$dl = \frac{D}{2} d\alpha \quad (3)$$

element puta petlje
 $d\alpha$ - prirast kuta.

Uvrštavanjem (3) u (1) dobije se:

$$dA = FD \cos \alpha d\alpha \quad (4)$$

Integriranjem po kutu α dobije se:

$$A = -FD \sin \alpha \Big|_0^{\pi} (= 0)$$

Jednadžba (4) može se napisati drugačije:

$$dA = Md\alpha \quad (5)$$

gdje je:

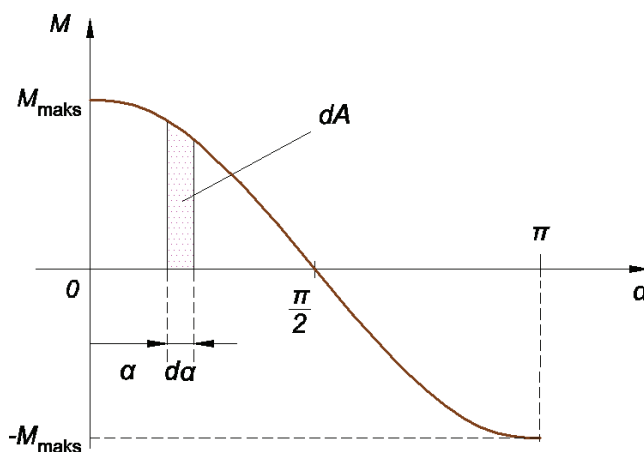
$$M = FD \cos \alpha \quad (6)$$

moment sprega sila

$$R = D \cos \alpha \quad (7)$$

krak na kojem djeluje sila F .

Na slici 2 prikazana je ovisnost momenta sila o kutu α .



Sl. 2. Ovisnost momenata sila o kutu zakretanja

Iz (5) i slike 2 slijedi da površina omeđena krivuljom momenata i koordinatnim osima odgovara radu. Iz slike 2 također je vidljivo da je rad kod zakreta od 180° jednak nuli (jednakost površina iznad i ispod osi apscisa).

Još o momentu sprega sila. Izrazi li se kut zakreta α s pomoću kuta β koji je definiran silom F i spojnicom osi rotacije $00'$ i napadne točke u kojoj djeluje sila F : $\beta = 90 - \alpha$. Uvrštavanjem u (6) dobije se:

$$M = FD \sin \beta \quad (8)$$

Uvrštavanjem (2) u (8) dobije se:

$$M = ILDB \sin \beta \quad (9)$$

ili u obliku:

$$M = mB \sin \beta \quad (10)$$

gdje je:

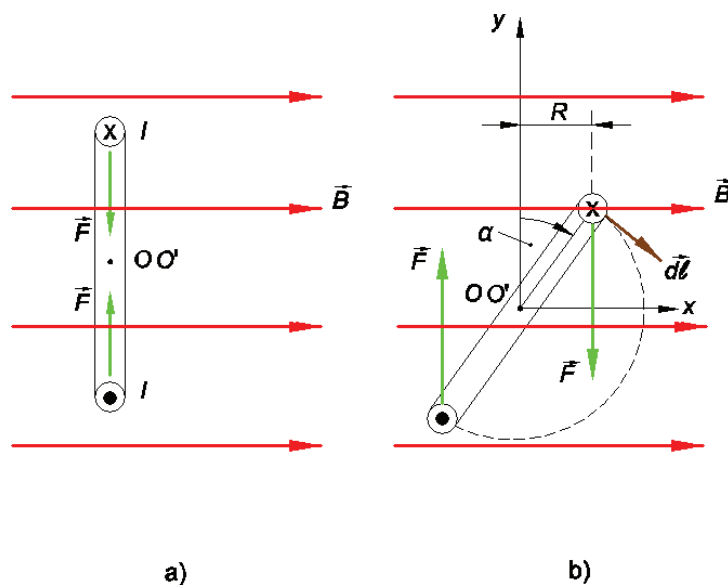
$$m = ILD = IS \quad (11)$$

magnetski moment strujne konture. Smjer magnetskog momenta kao vektorske veličine određuje smjer magnetskog polja (smjer normale na površinu).

Izraz (10) može se pisati kao vektorski umnožak dvaju vektora:

$$M = \vec{m} \times \vec{B} \quad (12)$$

b)



Sl. 3. Početni položaj strujne petlje a) i položaj nakon rotacije za kut α b)

Element rada, prema (1) i oznake prema slici 3b, jest:

$$dA = 2\vec{F}d\vec{l} = 2F dl \cos(90 - \alpha) \quad (13)$$

Ako se element puta izrazi kao u (3), (1) postaje:

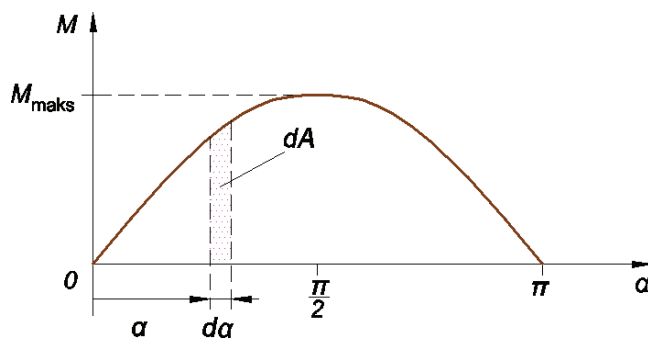
$$dA = FD \sin \alpha d\alpha \quad (14)$$

ili u obliku:

$$dA = M d\alpha \quad (15)$$

gdje je: M moment sila: $M = FD \sin \alpha$.

Na slici 4 prikazana je ovisnost momenta sila u ovisnosti o kutu α :



Sl. 4. Ovisnost momenata sila o kutu zakretanja

Integriranjem (14) dobije se:

$$A = -FD \cos \alpha \Big|_0^\pi = 2FD \quad (16)$$

Uvrštavanjem iznosa za silu dobije se:

$$A = 2ILDB \quad (=1,92 \text{ Ws}) \quad (17)$$



17. ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

17.1. Faradejev zakon indukcije. Lentzov zakon

Faradajev zakon glasi: Inducirana elektromotorna sila EMS u zatvorenoj petlji proporcionalna je brzini promjene magnetskog toka:

$$e_1 = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{V}) \quad (17.1)$$

Indeks 1 upućuje na to da je riječ samo o jednom zavoju. Ako je umjesto jednog zavoja svitak s N zavoja, tada je inducirana elektromotorna sila:

$$e = e_1 N = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (17.2)$$

Umnožak broja zavoja i magnetskog toka ulančani je magnetski tok:

$$\psi = N\phi \quad (\text{Vs}) \quad (17.3)$$

Uvrštavanjem (17.3) u (17.2) dobije se:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} \quad (\text{V}) \quad (17.4)$$

Lentzov zakon: Predznak minus u (17.1) ima fizikalno značenje: polaritet inducirane EMS i smjer struje koju ona u petlji uspostavi uvijek je takav da se magnetski tok koji ona proizvede suprotstavlja vremenskoj promjeni toka, uzročnika svog nastanka.

Ako se vodič giba brzinom \vec{v} u magnetskom polju indukcije \vec{B} , tada se u njemu, prema (13.10) i (13.11) I. Sveska, inducira EMS :

$$e = \int_0^L \vec{E}_{\text{ind}} d\vec{l} \quad (17.5)$$

gdje je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (17.6)$$

\vec{E} inducirano neelektrostatičko polje
 $d\vec{l}$ element duljine vodiča.

Smjer inducirane elektromotorne sile određuje se pravilom desne ruke: ako linije magnetskog polja upadaju u dlan ruke, a pri tome palac pokazuje smjer gibanja vodiča, tada ispruženi prsti pokazuju smjer inducirane *EMS*. v.sl. (24.2).

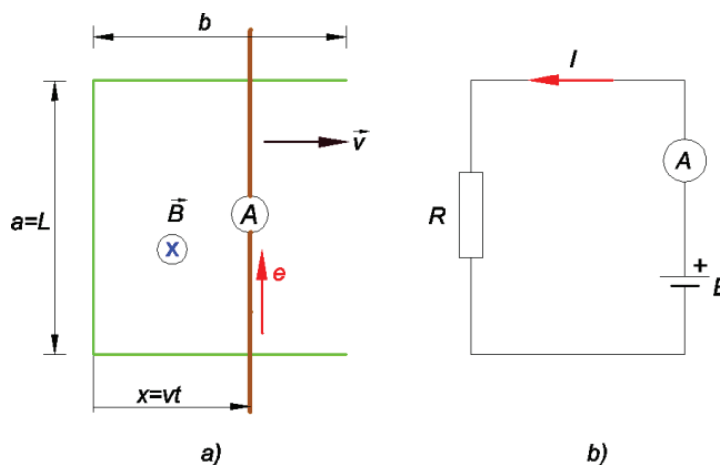
Primjer 17.1.1.

Poluotvoreni metalni okvir, dimenzija $a \times b$, nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Vektor magnetske indukcije \vec{B} okomit je na ravninu u kojoj leži metalni okvir. Vodič aktivne duljine L , $L = a$, klizi konstantnom brzinom \vec{v} po paralelnim stranicama okvira. Vodič i okvir su mjedeni, presjeka S i provodnosti κ . Odredite:

- induciranu *EMS* u vodiču i njen smjer
- pokazivanje ampermetra nakon vremena t .

Podatci: $B = 1,2 \text{ T}$, $v = 8 \text{ m/s}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $S_{\text{CuZn}} = 2,5 \text{ mm}^2$, $\kappa = 13,3 \text{ Sm/mm}^2$, $t = 0,1 \text{ s}$, $R_A = 0,8 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Vodič aktivne duljine L klizi brzinom v po otvorenom metalnom okviru a) i nadomjesna shema b)

a) Inducirana elektromagnetska sila. Inducirana *EMS*, prema (17.1), jest:

$$e_1 = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

gdje je:

$$\phi = \vec{B}\vec{S} \quad (2)$$

magnetski tok

$$S = Lx = Lvt \quad (3)$$

površina obuhvaćena metalnim okvirom i vodičem.

Budući da vektor magnetske indukcije \vec{B} upada u plohu pod pravim kutom, tako da su \vec{B} i \vec{S} međusobno kolinearni, skalarni umnožak (2) prelazi u algebarski. Uvrštavanjem (3) u (2) dobije se:

$$\phi = BLvt \quad (4)$$

Uvrštavanjem (4) u (1) i deriviranjem dobije se:

$$e = -BLv \quad (=14,4\text{ V}) \quad (5)$$

Smjer inducirane *EMS* određuje se pravilom desne ruke, v. 24.1 II.Sveska, i prikazan je na slici 1a.

b) Pokazivanje ampermetra. Uporabom II. Kirchhoffova zakona za strujni krug čija je nadomjesna shema prikazana na slici 1b, dobije se:

$$I = \frac{E}{R_v + R_A} \quad (6)$$

gdje je:

E inducirana elektromotorna sila (6)

$$R = \frac{l}{\kappa S} \quad (= 0,138\Omega) \quad (7)$$

otpor vodiča u strujnom krugu (okvir + klizni vodič)

$$l = 2a + 2x = 2a + 2vt \quad (= 4,6\text{ m}) \quad (8)$$

duljina strujnog kruga

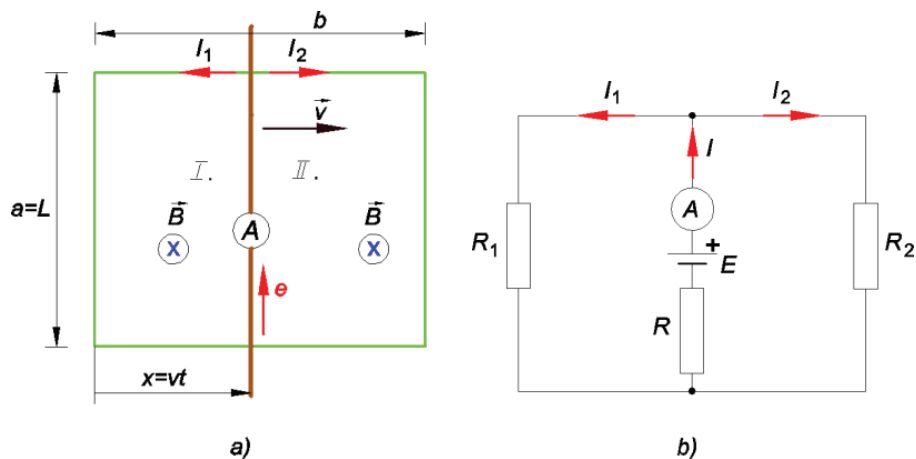
R_A - unutarnji otpor ampermetra (= 0,8Ω).

Uvrštavanjem (7) u (6) dobije se tražena struja: $I = 15,35\text{ A}$.



Primjer 17.1.2.

Ako se metalni okvir, iz prethodnog zadatka, zatvori uz zadržane sve zadane veličine odredite induciranu *EMS* u vodiču i pokazivanje ampermetra.

Rješenje

Sl. 1. Vodič aktivne duljine L klizi brzinom v po zatvorenom okviru a) i nadomjesna shema b)

Inducirana *EMS*, prema (5) primjera 17.1.1, jest:

$$e = -BLv \quad (= 14,4 \text{ V}) \quad (1)$$

gdje predznak minus upućuje na smjer inducirane *EMS*, a u svezi s očuvanjem magnetskog toka.

Zatvaranjem metalnog okvira nadomjesna shema dobila je još jednu petlju, slika 2b. Struja ampermetra jest:

$$I = \frac{E}{R + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)} \quad (2)$$

gdje je:

$$R = \frac{a}{\kappa S} + R_A \quad (= 0,845 \Omega) \quad (3)$$

otpor kliznog vodiča uvećan za unutarnji otpor ampermetra

$$R_1 = \frac{l_1}{\kappa S} \quad (= 93,2 \text{ m}\Omega) \quad (4)$$

otpor okvira I. petlje

$$l_1 = a + 2vt \quad (= 3,1 \text{ m}) \quad (5)$$

duljina okvira I. petlje

$$R_2 = \frac{l_2}{\kappa S} \quad (= 177,4 \text{ m}\Omega) \quad (6)$$

otpor okvira II. petlje

$$l_2 = a + 2(b - vt) \quad (= 5,9 \text{ m}) \quad (7)$$

duljina okvira II. petlje.

Uvrštavanjem (1), (3), (4) i (6) u (2) dobije se struja vodiča, odnosno pokazivanje ampermetra $I = 15,89 \text{ A}$.



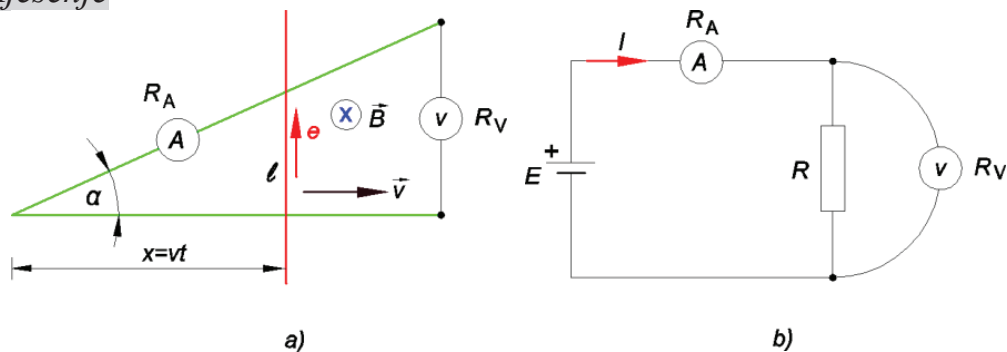
Primjer 17.1.3.

Po šinama, koje stoje međusobno pod kutom α , klizi vodič, promjenjive aktivne dužine l , konstantnom brzinom \vec{v} . Vektor magnetske indukcije \vec{B} okomit je na ravninu u kojoj leže šine. Šine i vodič načinjeni su od aluminija, presjeka S i provodnosti κ . Odredite:

- pokazivanje voltmetra
- pokazivanje ampermetra.

Podatci: $\alpha = 30^\circ$, $B = 0,8 \text{ T}$, $v = 4 \text{ m/s}$, $S_{\text{Al}} = 1 \text{ mm}^2$, $t = 0,2 \text{ s}$,
 $\kappa = 37 \text{ Sm/mm}^2$, $R_A = 0,7 \Omega$, $R_V \rightarrow \infty$.

Rješenje



Sl. 1. Šine po kojima klizi vodič su pod kutom α a) i nadomjesna shema b)

a) Pokazivanje voltmetra. Budući da je unutarnji otpor voltmetra $R_v \rightarrow \infty$, pokazivanje voltmetra jednako je induciranoj elektromotornoj sili:

$$e_v = e_1 = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right| \quad (1)$$

gdje je:

$$\phi = \vec{B}\vec{S} \quad (2)$$

magnetski tok

$$S = \frac{1}{2}xl = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}v^2 t^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

površina obuhvaćena šinama i vodičem

$$l = x \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1)$$

aktivna dužina vodiča.

Budući da su vektor magnetske indukcije \vec{B} i vektor obuhvaćene površine \vec{S} međusobno kolinearni, skalarni umnožak (2) prelazi u algebarski.

$$\phi = \frac{1}{2} B v^2 t^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (4)$$

Uvrštavanjem (4) u (1) i deriviranjem dobije se:

$$e_v = B v^2 t \operatorname{tg} \alpha \quad (= 1,478 \text{ V}) \quad (5)$$

b) Pokazivanje ampermetra. Uporabom II. Kirchhoffova zakona za strujni krug s nadomjesne sheme, slika 1b, jest:

$$i = \frac{e_v}{R + R_A} \quad (6)$$

gdje je :

e_v izmjereni napon

$$R = \frac{l_p}{\kappa S} \quad (= 0,059 \Omega) \quad (7)$$

otpor strujne petlje

$$l_p = vt \left(1 + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \quad (= 2,18 \text{ m}) \quad (8)$$

duljina okvira strujne petlje.

Uvrštavanjem (5) i (7) u (6) dobije se $i = 1,947 \text{ A}$.



Primjer 17.1.4.

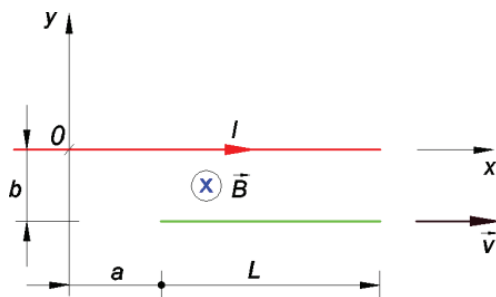
Vodič konačne duljine (u drugom svesku: štap) L giba se brzinom \vec{v} u nehomogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Nehomogeno magnetsko polje stvara struja konstantnog iznosa I koja teče ravnim, beskonačno dugim vodičem. Odredite induciranu EMS u vodiču ako je:

- štap paralelan s ravnim vodičem i giba se na konstantnoj udaljenosti od njega, slika 1
- štap okomit na ravni vodič i giba se na konstantnoj udaljenosti od njega, slika 2
- štap paralelan s ravnim vodičem i udaljava se od njega (u vremenu $t = 0$ vodič je za b udaljen od ravnog vodiča).

Podatci: $I = 300 \text{ A}$, $L = 1,5 \text{ m}$, $a = 0,2 \text{ m}$, $b = 0,1 \text{ m}$, $v = 1,5 \text{ m/s}$.

Rješenje

a)



Sl. 1. Položaj vodljivog štapa prema ravnom vodiču

Inducirana EMS, prema (17.5), jest:

$$e = \int_0^L \vec{E}_{\text{ind}} d\vec{l} \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

prema (17.6) inducirano neelektrostatičko polje.

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$e = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (3)$$

gdje je:

$$\vec{v} = v \vec{e}_x \quad (4)$$

brzina štapa

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} (-\vec{e}_z) \quad (5)$$

indukcija ravnog vodiča

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x \quad (6)$$

element duljine vodiča.

Uvrštavanjem (4), (5) i (6) u (3) uz $y = b$ dobije se:

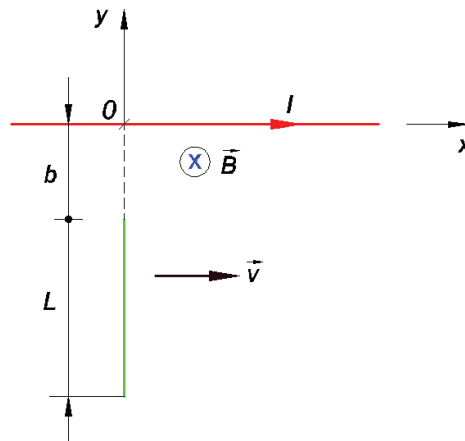
$$e = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi b} \int_0^L (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \vec{e}_x dl \quad (7)$$

Umnožak jediničnih vektora jest:

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \vec{e}_x = -\vec{e}_y \vec{e}_x = 0$$

Slijedi, ako se vodič konačne duljine L giba brzinom v paralelno ravnom, beskonačno dugom vodiču, na udaljenosti b nema inducirana EMS u njemu.

b)



Sl. 2. Položaj vodljivog štapa prema ravnom vodiču

Brzina \vec{v} i indukcija \vec{B} definirani su s (4) i (5), uz promjenjivu udaljenost elemenata duljine štapa dy prema ravnom vodiču. Element duljine štapa jest:

$$d\vec{l} = dy(-\vec{e}_y) \quad (8)$$

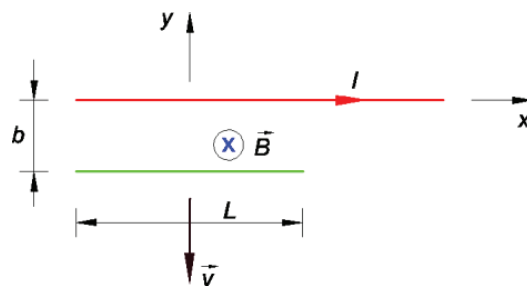
Uvrštavanjem (4), (5) i (8) u (3) dobije se:

$$e = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_b^{b+L} (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \vec{e}_y \frac{1}{y} dy \quad (9)$$

uz: $(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \vec{e}_y = (-\vec{e}_y) \vec{e}_y = -1$ dobije se:

$$e = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{b+L}{b} \quad (= -0,249 \text{ mV}) \quad (10)$$

c)



Sl. 3. Položaj vodljivog štapa prema ravnom vodiču

Brzina \vec{v} i smjer suprotan osi ordinata:

$$\vec{v} = -v\vec{e}_y \quad (11)$$

Vektor indukcije zadržao je svoj smjer (5), a isto tako i element duljine štapa (6). Uvrštavanjem (5), (6) i (11) u (3) dobije se:

$$e = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi y} \int_0^L [-\vec{e}_y \times (-\vec{e}_z)] \vec{e}_x dx \quad (12)$$

Uz $(\vec{e}_y \times \vec{e}_z)\vec{e}_x = \vec{e}_x \vec{e}_x = 1$ dobije se:

$$e = -\frac{\mu_0 I v L}{2\pi y} \quad (13)$$

Gdje je udaljenost vodljivog štapa y od ravnog vodiča:

$$y = b + vt \quad (14)$$

Uvrštavanjem (14) u (13) dobije se:

$$e = -\frac{\mu_0 I v L}{2\pi(b + vt)} \quad (15)$$

Inducirana *EMS* za različite vrijednosti t jesu:

$t(\text{s})$	0,1	0,3	0,5	1,0
$e(\text{mV})$	0,54	0,24	0,158	0,084



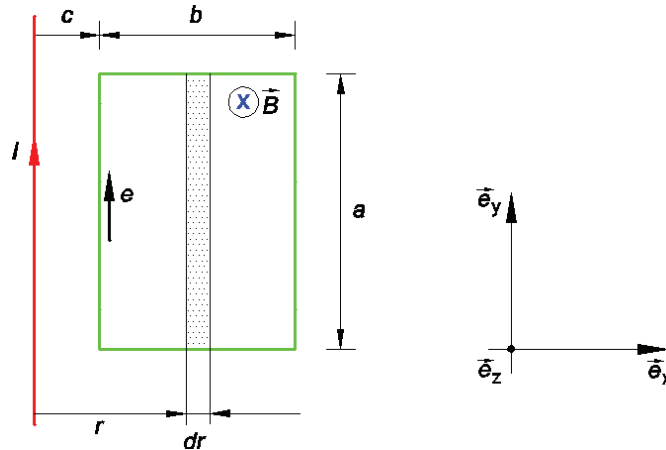
Primjer 17.1.5.

Pravokutni svitak dimenzija $a \times b$ ima N zavoja. Ravni, beskonačno dugi vodič leži u ravnini svitka i paralelan je s njegovom jednom stranicom, slika 1. Odredite induciranu *EMS* u svitku i grafički ga prikažite ako je struja u ravnom vodiču:

- pilastog oblika, slika 2
- trapeznog oblika, slika 3.

Podatci: $I_{\max} = 10 \text{ A}$, $N = 100$ zavoja, $a = 30 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$,
 $t_1 = 1 \text{ ms}$.

Rješenje



Sl. 1. Svitak s N zavoja i ravni vodič

Inducirana elektromotorna sila, prema (17.2), jest:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

gdje je:

N broj zavoja

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (2)$$

diferencijal magnetskog toka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} (-\vec{e}_z) \quad (3)$$

indukcija ravnog, beskonačno dugog vodiča

$$d\vec{S} = a dr (-\vec{e}_z) \quad (4)$$

element površine.

Napomena: Pozitivan smjer normale određuje se po pravilu desnog vijka u odnosu prema izabranom pozitivnom smjeru obilaženja po konturi, vidi odjeljak (21.3).

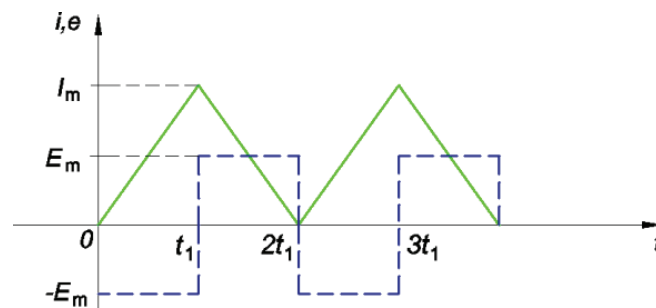
Budući da su smjerovi vektora indukcije \vec{B} i vektora površine \vec{S} omeđeni svitkom međusobno kolinearni, skalarni umnožak (2) prelazi u algebarski.

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) dobije se:

$$d\phi = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

$$\phi = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln r \Big|_c^{c+b} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c} \quad (6)$$

a)



Sl. 2. Izgled promjenjive struje i njoj pripadna inducirana EMS

Struja i vremenski je promjenjiva za:

$$[0, t_1] \quad , \quad i = \frac{I_m}{t_1} t \quad (7)$$

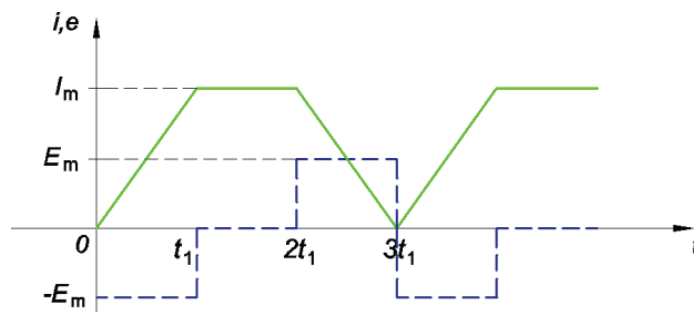
$$[t, 2t_1] \quad , \quad i = -\frac{I_m}{t_1} t + 2I_m \quad (8)$$

Uvrštavanjem (7) odnosno (8) u (6), prema (1), dobije se za:

$$[0, t_1] \quad , \quad e = -\frac{N\mu_0 I_m a}{2\pi t_1} \ln \frac{c+b}{c} \quad (= -65,916 \text{mV}) \quad (9)$$

$$[t, 2t_1] \quad , \quad e = \frac{N\mu_0 I_m a}{2\pi t_1} \ln \frac{c+b}{c} \quad (= +65,916 \text{mV}) \quad (10)$$

b)



Sl. 3. Izgled promjenjive struje i njoj pripadna inducirana EMS

Struja i vremenski je promjenjiva za:

$$[0, t_1] \quad , \quad i = \frac{I_m}{t_1} t \quad (11)$$

$$[t_1, 2t_1] \quad , \quad i = I_m \quad (12)$$

$$[2t_1, 3t_1] \quad , \quad i = \frac{-I_m}{t_1} t + 3I_m \quad (13)$$

Uvrštavanjem (12) odnosno (13) u (6), prema (1), dobije se za:

$$[0, t_1] \quad , \quad e = -\frac{N\mu_0 I_m a}{2\pi t_1} \ln \frac{c+b}{c} \quad (= -65,916 \text{ mV}) \quad (14)$$

$$[t_1, 2t_1] \quad , \quad e = 0 \quad (15)$$

$$[2t_1, 3t_1] \quad , \quad e = \frac{N\mu_0 I_m a}{2\pi t_1} \ln \frac{c+b}{c} \quad (= +65,916 \text{ mV}) \quad (16)$$

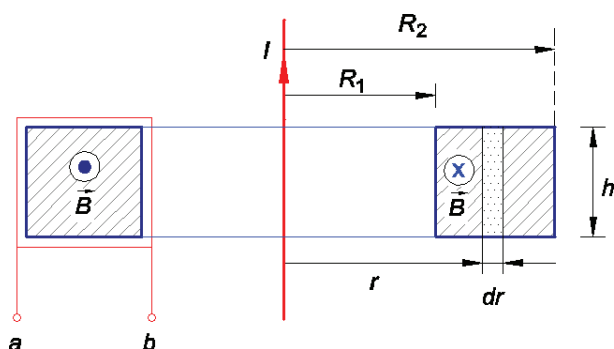


Primjer 17.1.6.

Na torusnu, nemagnetsku jezgru poznatih izmjera namotano je N zavoja. Ravni, beskonačno dugi vodič, kojim teče vremenski promjenjiva struja i smješten je u osi torusne jezgre. Odredite induciranu EMS u svitku.

Podatci: $i = at$, $a = 5 \text{ A/s}$, $R_1 = 8 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$, $N = 4000$.

Rješenje

Sl. 1. Torusna jezgra namotana je sa N zavoja

Inducirana EMS, prema (17.2), jest:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

gdje je:

$$\phi = \int_s \vec{B} d\vec{S} \quad (2)$$

tok što ga ulančuje N zavoja

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_z \quad (3)$$

indukcija što je stvara ravni vodič

$$d\vec{S} = h dr \vec{e}_z \quad (4)$$

element površine torusne jezgre.

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

Integriranjem dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (1), uz zadanu vremenski promjenjivu struju, $i = at$ dobije se:

$$e = -\frac{N\mu_0 ha}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (= -8,93 \mu\text{V})$$



Primjer 17.1.7.

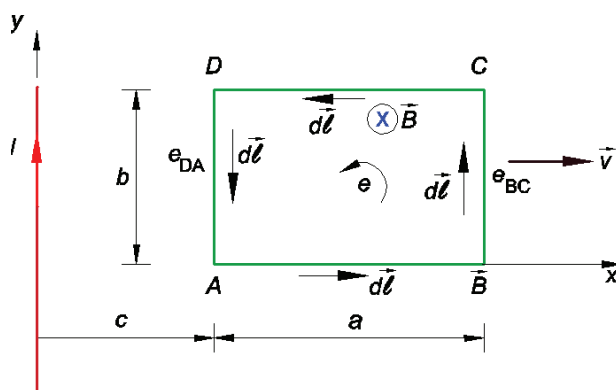
Pravokutna petlja, dimenzija $a \times b$, leži u istoj ravnini s ravnim, beskonačno dugim vodičem kojim teče struja konstantne jakosti I . Petlja se udaljava brzinom v od ravnog vodiča i u trenutku $t = 0$ udaljena je od njega za c . Odredite inducirano EMS po iznosu i smjeru.

Podatci: $I = 50 \text{ A}$, $v = 20 \text{ m/s}$, $a = 0,4 \text{ m}$, $b = 0,3 \text{ m}$, $c = 0,5 \text{ m}$.

Rješenje Zadatak se može riješiti na dva načina:

- polazeći od induciranog (neelektrostatičkog) polja
- polazeći od Faradayeva zakona.

a)



Sl. 1. Pravokutna petlja giba se brzinom v u nehomogenom magnetskom polju

Ako se vodič giba brzinom \vec{v} u magnetskom polju indukcije \vec{B} , u njemu se, prema (17.5), inducira EMS :

$$e = \int_0^L \vec{E}_{\text{ind}} d\vec{l} \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B} = \vec{e}_y v B \quad (2)$$

inducirano (neelektrostatičko) polje

$d\vec{l}$ element duljine vodiča.

Budući da je \vec{E}_{ind} na stranicama petlje AB i CD okomit na element duljine $d\vec{l}$, skalarni je umnožak $\vec{E}_{\text{ind}}d\vec{l}$ u (1) jednak nuli. Slijedi, ostaje inducirana EMS u dijelovima petlje AD i BC :

$$e_{\text{AD}} = \int_0^B (\vec{v} \times \vec{B}_{\text{AD}}) d\vec{l} \quad (3)$$

$$e_{\text{BC}} = \int_0^B (\vec{v} \times \vec{B}_{\text{BC}}) d\vec{l} \quad (4)$$

gdje je:

$$\vec{v} = v\vec{e}_x \quad (5)$$

brzina gibanja petlje

$$\vec{B}_{\text{AD}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi c} \vec{e}_z \quad (6)$$

$$\vec{B}_{\text{BC}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(c+a)} \vec{e}_z \quad (7)$$

indukcija što ih stvara struja i na udaljenosti c odnosno $c+a$

$$d\vec{l} = \mp dl \vec{e}_y \quad (8)$$

element duljine vodiča.

Uvrštavanjem (5) do (8) u (3) odnosno (4) dobije se:

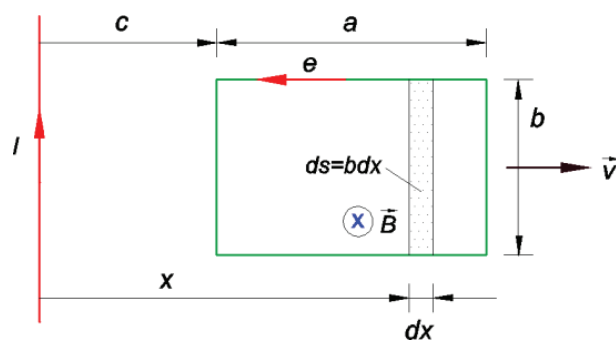
$$e_{\text{AD}} = -\frac{vb\mu_0 I}{2\pi c} \quad (9)$$

$$e_{\text{BC}} = \frac{vb\mu_0 I}{2\pi(c+a)} \quad (10)$$

Inducirana neelektrostatička polja E_{AD} i E_{BC} jednakog su smjera pa je rezultirajući EMS jednaka:

$$e = e_{AD} + e_{BC} = -\frac{vab\mu_0 I}{2\pi c(c+a)} \quad (= -0,053 \text{ mV}) \quad (11)$$

b)



Sl. 2. Pravokutna petlja obuhvaća tok ϕ koji je prostorno promjenjiv

Inducirana EMS u petlji, prema (17.1), jest:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (12)$$

gdje je:

$$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (13)$$

magnetski tok obuhvaćen petljom

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_z \quad (14)$$

magnetska indukcija

$$d\vec{S} = bdx \vec{n}_0 \quad (15)$$

element površine, gdje je $\vec{n}_0 = \vec{e}_z$

$$x = c + vt \quad (16)$$

udaljenost petlje od ravnog vodiča.

Uvrštavanjem (14) i (15) u (13), \vec{B} i $d\vec{S}$ kolinearni su vektori, dobije se:

$$\phi = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} \quad (17)$$

Integriranjem dobije se:

$$\phi = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \quad (18)$$

Uočite: inducirana *EMS* (1) ovisna je o vremenu, a magnetski tok (18) o prostornoj koordinati. Stoga se (1) proširuje:

$$e = -\frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt} = -v \frac{d\phi}{dx} \quad (19)$$

Uvrštenjem (18) u (19) i deriviranjem dobije se:

$$e = \frac{\mu_0 I b v}{2\pi} \frac{x}{x+a} \frac{x-(x+a)}{x^2} \quad (20)$$

Sređivanjem dobije se:

$$e = -\frac{\mu_0 I a b v}{2\pi} \frac{1}{x(x+a)} \quad (21)$$

Za $t = 0$, prema postavi zadatka i jednadžbi (16), $x = c$, pa inducirana *EMS* jest:

$$e = -\frac{\mu_0 I a b v}{2\pi c(c+a)} \quad (22)$$

što je jednako (11).

Smjer inducirane *EMS* suprotan je od referentnog smjera, tj. on je u smjeru kazaljke na satu. Naime, udaljavanjem petlje od izvora magnetskog polja ulančeni tok petlje smanjuje se, pa prema Lenzovu zakonu smjer inducirane *EMS* mora biti takav da se od njega proizvedeni tok suprotstavlja smanjenju izvornog toka.

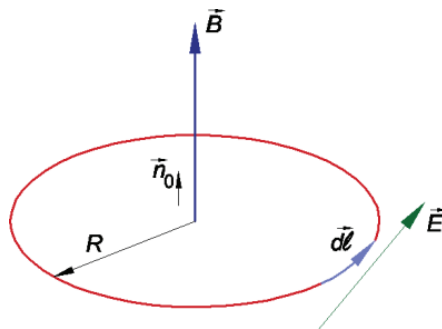


Primjer 17.1.8.

Vodljiva petlja kružnog oblika, radijusa R , nalazi se u prostorno homogenom i vremenski promjenjivom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Linije polja prožimaju petlju pod pravim kutom (linije polja okomite su na površinu omeđenu kružnom petljom), slika 1. Odredite:

- induciranu EMS u petlji
- inducirano električno polje u petlji.

Podatci: $B = B_0 t$, $B_0 = 1,20 \text{ T}$, $R = 0,3 \text{ m}$.

Rješenje

Sl. 1. Vodljiva petlja u prostorno homogenom vremenski promjenjivom polju

a) Inducirana EMS , prema (17.1), jest:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

gdje je:

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (2)$$

magnetski tok

$$\vec{B} = B_0 t \vec{n}_0 \quad (3)$$

magnetska indukcija.

Budući da su vektori indukcije i površine međusobno kolinearni, v.sliku 1, skalarni umnožak (2) prelazi u algebarski.

$$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = B_0 t R^2 \pi \quad (4)$$

Uvrštavanjem (4) u (1) dobije se:

$$e = -B_0 R^2 \pi \quad (= 0,34 \text{ V}) \quad (5)$$

b) Inducirano (neelektrostatičko) polje, prema (17.5), vezano je uz induciranu EMS:

$$e = \int_0^{2R\pi} \vec{E}_{\text{ind}} d\vec{l} = \int_0^{2R\pi} E_{\text{ind}} dl \quad (6)$$

Uvrštavanjem (5) u (6) dobije se:

$$-B_0 R^2 \pi = E_{\text{ind}} 2R\pi$$

odakle jest:

$$E_{\text{ind}} = -\frac{1}{2} B_0 R \quad (= -0,18 \text{ V/m})$$

Zaključak: Inducirano neelektrostatičko polje suprotno je od smjera orijentacije petlje i njegova struja suprotstavlja se svojim poljem porastu magnetske indukcije. Prema (6) i slici 1 slijedi da se linije induciranog (neelektrostatičkog) polja kao i linije magnetskog polja zatvaraju same u sebe.

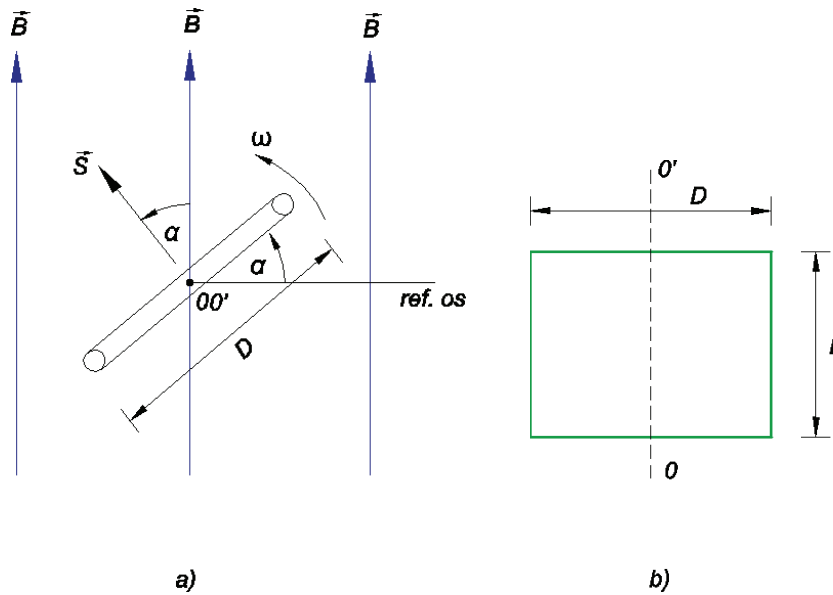


Primjer 17.1.9.

Pravokutna petlja, dimenzija $L \times D$, vrti se konstantnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Odredite pokazivanje voltmetra.

Podatci: $B = 1,2 \text{ T}$, $L = 0,2 \text{ m}$, $D = 0,8 \text{ m}$, $n = 900 \text{ okr/min}$.

Rješenje



Sl. 1. Pravokutna petlja u homogenom magnetskom polju a) i izgled petlje b)

Inducirana elektromotorna sila, prema (17.1), jest:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

gdje je:

$$\phi = \vec{B}\vec{S} \quad (2)$$

magnetski tok

$$\vec{S} = DL\vec{n}_0 \quad (3)$$

površina obrubljena petljom.

Vektori indukcije \$\vec{B}\$ i površine \$\vec{S}\$ prema slici 1a međusobno zatvaraju kut \$\alpha\$. Skalarni umnožak (2) prelazi u algebarski.

$$\phi = BS \cos \alpha \quad (4)$$

Kut \$\alpha\$ jest:

$$\alpha = \omega t \quad (5)$$

gdje je:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (= 94,25 \text{ okr/sek}) \quad (6)$$

ω - kutna brzina

t - vrijeme

n - broj okretaja u minuti.

Uvrštavanjem (3) i (5) u (4), a potom u (1) pa deriviranjem po vremenu dobije se:

$$e = E_m \sin \omega t \quad (7)$$

gdje je:

$$E_m = \omega BLD \quad (= 180,96 \text{ V})$$

maksimalni iznos inducirane elektromotorne sile.

Zaključak: U petlji koja se giba kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju inducira se *EMS* sinusnog oblika.

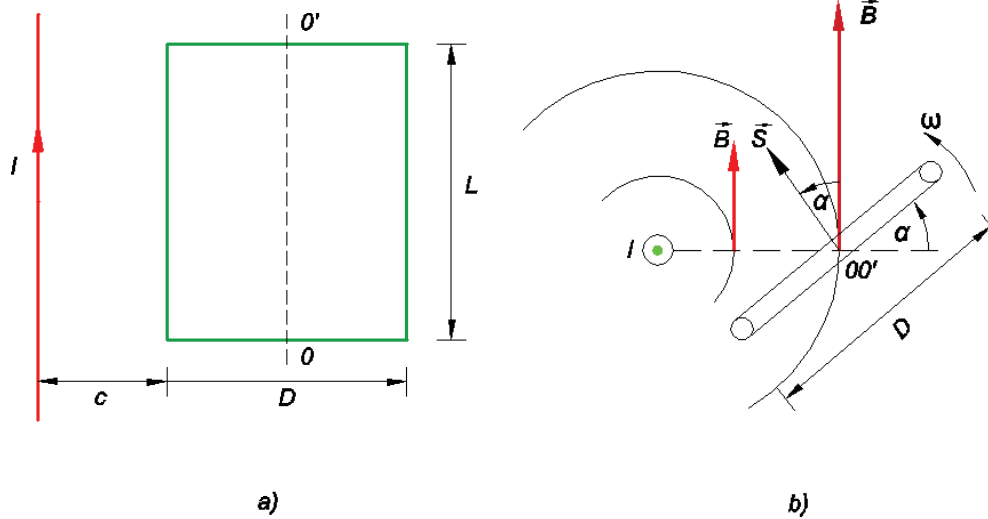


Primjer 17.1.10.

Pravokutna petlja, iz prethodnog zadatka, rotira u nehomogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} . Uzrok nehomogenog magnetskog polja je ravni, beskonačno dugi vodič kojim teče struja konstantnog iznosa I . Ravni vodič i os rotacije $00'$ leže u istoj ravnini, slika 1. Odredite induciranu elektromotornu silu u petlji.

Podatci: $I = 500 \text{ A}$, $L = 2 \text{ m}$, $D = 0,8 \text{ m}$, $n = 900 \text{ okr/min}$, $c = 0,3 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Ravni vodič i petlja a) i opći položaj petlje u magnetskom polju b)

Inducirana EMS, prema (17.1), jest:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

gdje je:

$$d\phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS \cos \alpha \quad (2)$$

magnetski tok

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (3)$$

magnetska indukcija ravnog vodiča

$$d\vec{S} = Ldr \vec{n}_0 \quad (4)$$

element površine

 r udaljenost petlje od ravnog vodiča.Kut što ga zatvaraju vektori \vec{B} i \vec{S} jest:

$$\alpha = \omega t \quad (5)$$

gdje je:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (= 94,25 \text{ okr/sek}) \quad (6)$$

kutna brzina

n - broj okretaja u minuti.

Uvrštavanjem (3), (4) i (5) u (2) dobije se:

$$d\phi = \frac{\mu_0 IL \cos \omega t}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (7)$$

Integriranjem u granicama $[c, c + D]$ dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 IL \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{c + D}{c} \quad (8)$$

Uvrštavanjem (8) u (1) dobije se:

$$e = E_m \sin \omega t \quad (9)$$

gdje je:

$$E_m = \frac{\mu_0 \omega IL}{2\pi} \ln \frac{c + D}{c} \quad (= 24,49 \text{ mV})$$

maksimalni iznos inducirane EMS.

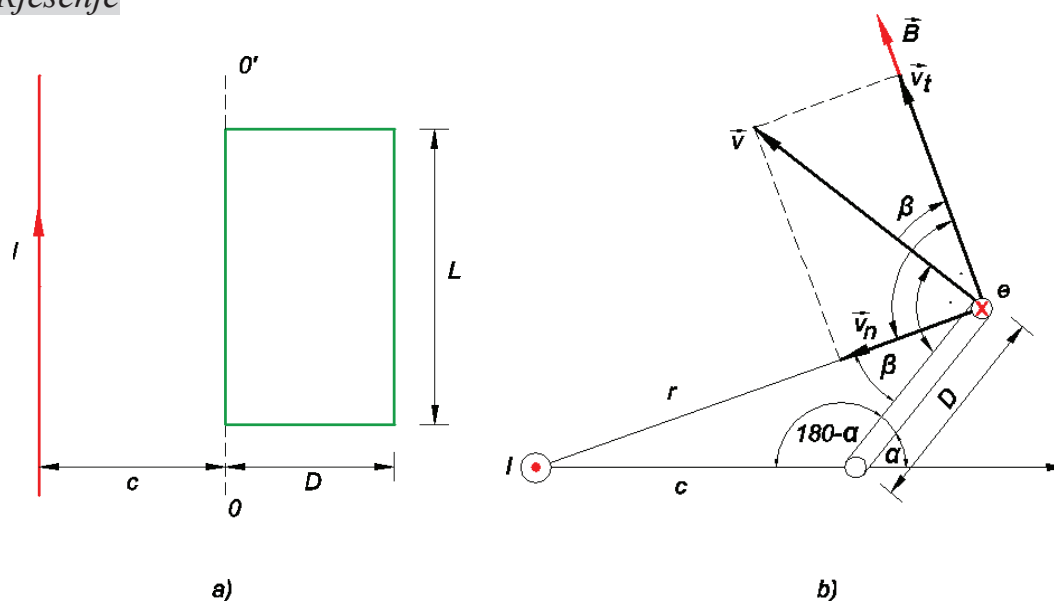


Primjer 17.1.11.

Pravokutna petlja iz prethodnog zadatka rotira kutnom brzinom ω oko svoje duže stranice, slika 1a. Duža stranica (aktivni vodič) i ravni vodič nalaze se u istoj ravnini. Odredite induciranu EMS u petlji.

Podatci: $I = 500 \text{ A}$, $L = 2 \text{ m}$, $D = 0,8 \text{ m}$, $n = 900 \text{ okr/min}$, $c = 1 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Ravni vodič i petlja a) i opći položaj petlje u magnetskom polju b)

Budući da se ne može odrediti maksimalan tok, trebalo bi ga računati kao superpoziciju za $\left[0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right]$ i $\left[\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right]$, zadatak će se riješiti polazeći od induciranoeg neelektrostatičkog polja.

Inducirana EMS u vodiču koji se giba brzinom \vec{v} , prema (17.5) i (17.6), jest:

$$e = \int_0^L \vec{E}_{\text{ind}} d\vec{l} \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

inducirano neelektrostatičko polje

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (3)$$

magnetska indukcija ravnog vodiča

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_n \quad (4)$$

brzina vodiča, rastavljena na dvije međusobno okomite komponente.

Uvrštavanjem (4) u (2) dobije se:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = (\vec{v}_t + \vec{v}_n) \times \vec{B} \quad (5)$$

Vektorski umnožak $\vec{v}_t \times \vec{B}$ jednak je nuli (kut među njima je nula) pa (5) postaje:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v}_n \times \vec{B} \quad (6)$$

Komponenta brzine:

$$\vec{v}_n = v \sin \beta \quad (7)$$

jest okomita na vektor \vec{B} pa vektorski umnožak (6) prelazi u algebarski:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = v_n B = v B \sin \beta \vec{e}_L \quad (8)$$

Uvrštavanjem (8) u (1) dobije se:

$$e = \int_0^L v B \sin \beta \vec{e}_L dl \vec{e}_L \quad (9)$$

Integriranjem dobije se:

$$e = v B L \sin \beta \quad (10)$$

gdje je:

$$\sin \beta = \frac{c}{r} \sin \alpha \quad (11)$$

$$r^2 = c^2 + D^2 + 2cD \cos \alpha \quad (12)$$

udaljenost vodiča petlje od ravnog vodiča

$$\alpha = \omega t \quad (13)$$

kut rotirajuće petlje prema referentnoj osi (vidi sliku 1b).

Uvrštavanjem (3) i (11) u (10) dobije se:

$$e = \frac{\mu_0 I L v c \sin \alpha}{2\pi r^2} \quad (14)$$

Uvrštavanjem (12) i (13) u (14) dobije se:

$$e = \frac{\mu_0 I L v c \sin \omega t}{2\pi(c^2 + D^2 + 2cD \cos \omega t)}$$

Iznos inducirane EMS za neke karakteristične kutove jest:

$$\omega t [\text{rad}] = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad 3\frac{\pi}{2}$$

$$e [\text{mV}] = 0, \quad +9,19, \quad 0, \quad -9,19$$

Napomena: brzina $v = \omega D = \frac{2\pi n}{60} D$ ($= 75,4 \text{ m/s}$).

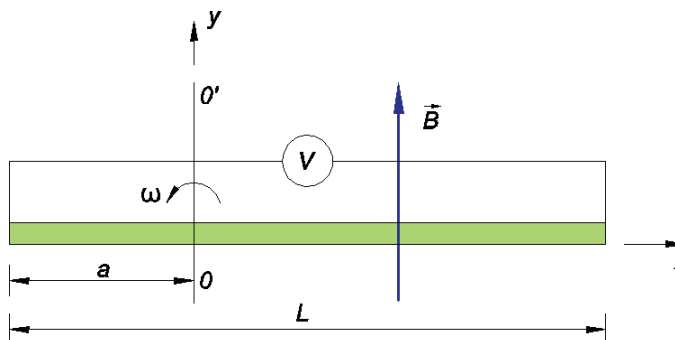


Primjer 17.1.12.

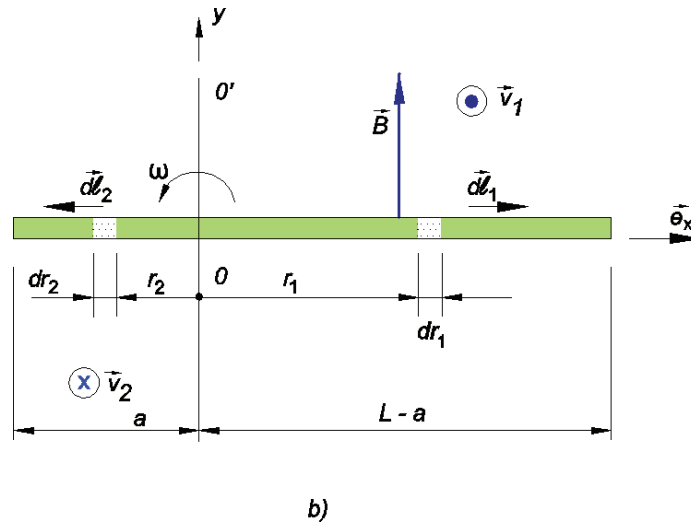
Štap duljine L rotira konstantnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju indukcije B . Os rotacije štapa kolinearne je s linijama magnetskog polja. Odredite pokazivanje voltmetra za različite položaje osi rotacije, slika 1.

Podatci: $B = 0,8 \text{ T}$, $L = 1,2 \text{ m}$, $a = 0, L/4, L/2, 3L/4, L$, $n = 150 \text{ okr/min}$.

Rješenje



a)



Sl. 1. Štap duljine L rotira oko osi OO' kutnom brzinom ω a) i smjerovi indukcije, brzine i elementa štapa b)

Inducirana EMS, prema (17.5), jest:

$$e = \int_0^L \vec{E}_{\text{ind}} d\vec{l} \quad (1)$$

gdje je:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

\vec{E} inducirano neelektrostatičko polje
 $d\vec{l}$ element duljine štapa.

Inducirano neelektrostatičko polje, prema (2), jest:

$$\vec{E}_{\text{ind1}} = v_1 B \vec{e}_x \quad (3.1)$$

$$\vec{E}_{\text{ind2}} = -v_2 B \vec{e}_x \quad (3.2)$$

gdje je:

$$\vec{v}_1 = -v_1 \vec{e}_z = -\omega r_1 \vec{e}_z \quad (4.1)$$

$$\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_z = \omega r_2 \vec{e}_z \quad (4.2)$$

obodna brzina točke na rotirajućem štapu udaljena za r_1 odnosno r_2 od osi rotacije OO'

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (= 15,707 \text{ okr/sek}) \quad (4.3)$$

kutna brzina rotacije štapa

$$\vec{B} = B\vec{e}_y \quad (4.4)$$

magnetska indukcija.

Iz (3) vidljivo je da su inducirana neelektrostatička polja usmjerena od osi rotacije ka krajevima štapa.

Uvrštavanjem (3) u (1) uz:

$$d\vec{l}_1 = dr_1\vec{e}_x \quad (5.1)$$

$$d\vec{l}_2 = dr_2(-\vec{e}_x) \quad (5.2)$$

dobije se:

$$e_1 = \frac{1}{2} \omega B r_1^2 \Big|_0^{L-a} = \frac{1}{2} \omega B (L-a)^2 \quad (6.1)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \omega B r_2^2 \Big|_0^a = \frac{1}{2} \omega B a^2 \quad (6.2)$$

Pokazivanje voltmetra jednako je razlici induciranih EMS-a:

$$U = e_1 - e_2 = \frac{1}{2} \omega B L (L - 2a) \quad (7)$$

Za pojedine iznose udaljenosti a osi vrtnje od početka štapa napon jest:
za:

$$a = 0 \quad U = \frac{1}{2} \omega B L^2 \quad (= 9,05 \text{ V}) \quad (8.1)$$

$$a = \frac{L}{4} \quad U = \frac{1}{4} \omega B L^2 \quad (= 4,52 \text{ V}) \quad (8.2)$$

$$a = \frac{L}{2} \quad U = 0 \text{ V} \quad (8.3)$$

$$a = \frac{3L}{4} \quad U = -\frac{1}{4}\omega BL^2 \quad (= -4,52 \text{ V}) \quad (8.4)$$

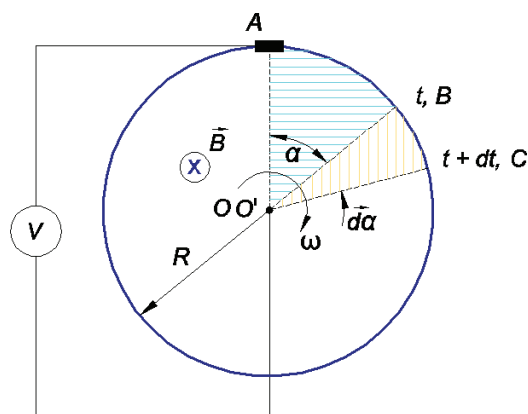
$$a = L \quad U = -\frac{1}{2}\omega BL^2 \quad (= -9,05 \text{ V}) \quad (8.5)$$



Primjer 17.1.13.

Tanki metalni disk, radijusa R , vrti se kutnom brzinom ω oko osi $00'$ u homogenom magnetskom polju indukcije B . Os rotacije diska i linije magnetskog polja međusobno su paralelne (linije magnetskog polja upadaju pod pravim kutem na metalni disk). Odredite pokazivanje voltmetra, slika 1. Podatci: $B = 1 \text{ T}$, $R = 0,3 \text{ m}$, $n = 150 \text{ okr/min}$.

Rješenje



Sl. 1. Metalni disk vrti se konstantnom kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju

Razlika potencijala između četkice (točka A) i osi metalnog diska $00'$ ekvivalentna je potencijalu štapa duljine R koji se vrti kutnom brzinom ω u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} , vidi primjer 17.1.12. Razlika potencijala prema (7) istog primjera, za $a = 0$ ili L , jest:

$$U = \pm \frac{1}{2}\omega BR^2 \quad (= 0,706 \text{ V}) \quad (1)$$

gdje je:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (= 15,707 \text{ okr/sek})$$

kutna brzina diska.

Do istog se rezultata može doći polazeći od Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije:

$$e_1 = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2)$$

gdje je:

$$d\phi = \phi(t + dt) - \phi(t) \quad (3)$$

prirast toka u vremenu dt .

Prema slici 1 taj prirast jest:

$$d\phi = \phi_{OAC} - \phi_{OAB} = \phi_{OBC} = BdS \quad (4)$$

gdje je:

$$dS = \frac{1}{2} R^2 d\alpha \quad (5)$$

površina kružnog isječka

$$d\alpha = \omega dt \quad (6)$$

prirast kuta zakretanja.

Uvrštavanjem (5) i (6) u (4), a potom u (2) dobije se:

$$e = -\frac{1}{2} \omega BR^2 \quad (7)$$

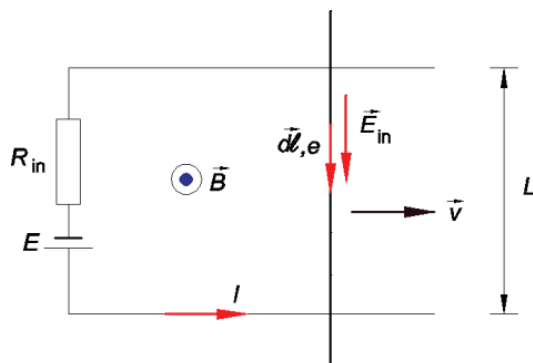
Ovaj izraz indentičan je izrazu (1).



Primjer 17.1.14.

Vodljivi štap aktivne duljine L giba se brzinom v u homogenom magnetskom polju indukcije B po stranicama otvorenog metalnog pravokutnog okvira. Vodljivi je štap u svakom trenutku okomit na dvije stranice vodljivog okvira, slika 1. Odredite iznos električnog polja u vodljivom štapu.

Podatci: $E = 120\text{V}$, $B = 1,2\text{T}$, $L = 0,8\text{m}$, $v = 10\text{m/s}$, $R_{\text{in}} = 0,8\Omega$, $R_{\text{vš}} = 0,81\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Vodljivi štap giba se brzinom v po vodljivom okviru

Električno polje u vodiču, prema (13.21) II. Sveska, jest:

$$E_{\text{vš}} = \frac{J}{\kappa} \quad (1)$$

gdje je:

$$J = \frac{I}{S} \quad (2)$$

J - gustoća struje

κ - električna provodnost

$$I = \frac{E - e}{R_{\text{in}} + R_{\text{vš}}} \quad (3)$$

struja petlje

$$e = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (4)$$

inducirana EMS u vodljivom štapu.

Budući da su \vec{v} , \vec{B} i $d\vec{l}$ međusobno okomiti vektori, (4) postaje

$$e = vBL \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) u (3), a potom u (2) i (1) dobije se:

$$E_{v\check{s}} = \frac{1}{\kappa S} \frac{E - vBL}{R_{in} + R_{v\check{s}}} \quad (6)$$

$$E_{v\check{s}} = \frac{R_{v\check{s}}}{L} \frac{E - vBL}{R_{in} + R_{v\check{s}}} \quad (= 69,43 \text{ V/m}) \quad (7)$$



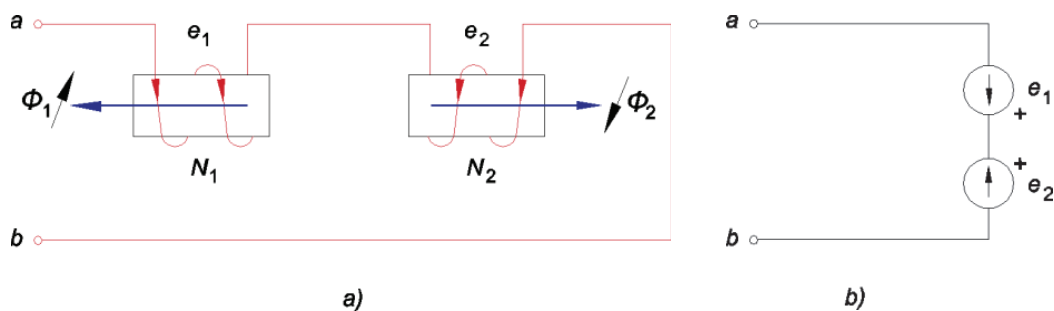
Primjer 17.1.15.

Dva svitka s N_1 odnosno N_2 zavoja serijski su međusobno spojeni. Svitke prožimaju tokovi ϕ_1 i ϕ_2 iz nezavisnih izvora koji nisu prikazani na shemi. Odredite napon U_{ab} među stezaljkama a i b za različite smjerove tokova i različite smjerove namatanja svitka.

Podatci: $\phi_1 = 5t + 2$, $\phi_2 = -3t + 10$, $N_1 = 10$, $N_2 = 20$.

Rješenje U svakom od svitaka inducira se EMS kao posljedica promjenjivog magnetskog toka u njemu. Smjer induciranih EMS određen je Lentzovim zakonom. Inducirana EMS u svakom od svitaka, prema (17.2), jest:

a)



Sl. 1. Shema spoja dva svitka s ucrtanim smjerovima induciranih EMS a) i nadomjesna shema b)

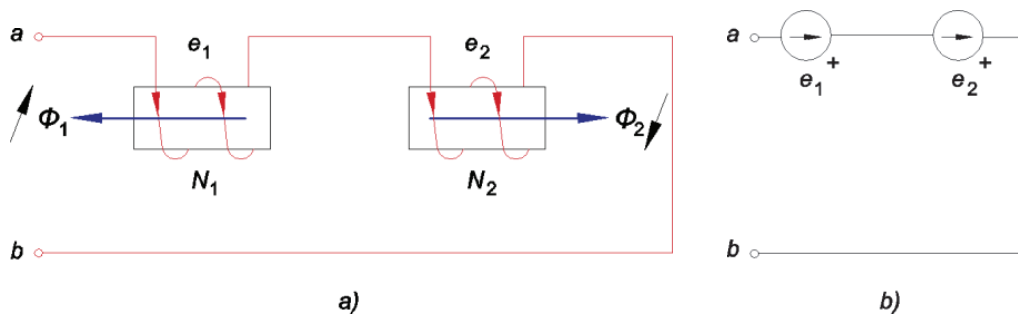
Inducirane EMS u svakom od svitaka, prema (17.2), jest:

$$e_1 = \left| -N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \right| \quad (= 50 \text{ V}) \quad (1)$$

$$e_2 = \left| -N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \right| \quad (= 60 \text{ V}) \quad (2)$$

Za smjerove induciranih EMS slika 1a) i nadomjesne sheme 1b) napon među stezaljkama a i b jest: $U_{ab} = -e_1 + e_2 \quad (= +10 \text{ V})$.

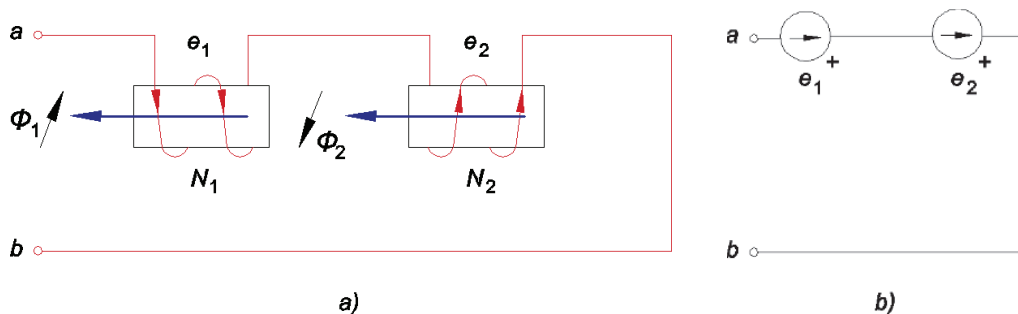
b)



Sl. 2. Shema spoja dva svitka s ucrtanim smjerovima induciranih EMS a) i nadomjesna shema b)

Za smjerove induciranih EMS slika 2a) i nadomjesne sheme 2b) napon između stezaljka a i b jest: $U_{ab} = -e_1 - e_2 \quad (= -110 \text{ V})$.

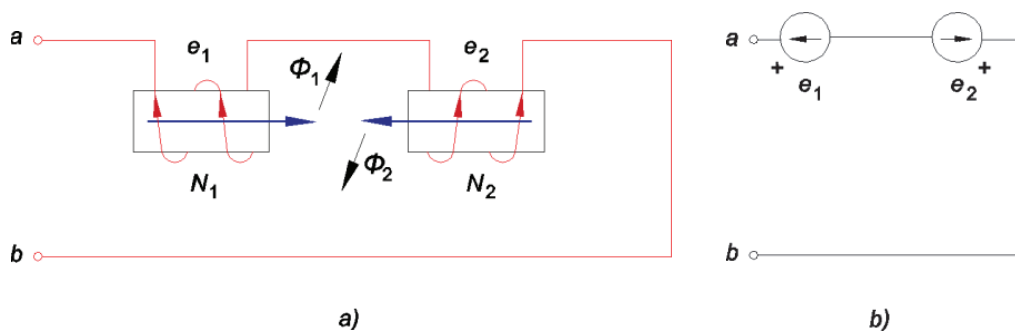
c)



Sl. 3. Shema spoja dva svitka s ucrtanim smjerovima induciranih EMS a) i nadomjesna shema b)

Za smjerove induciranih EMS slika 3a) i nadomjesne sheme 3b) napon između stezaljka a i b jest: $U_{ab} = -e_1 - e_2$ ($= -110$ V).

d)



Sl. 4. Shema spoja dva svitka s ucrtanim smjerovima induciranih EMS a) i nadomjesna shema b)

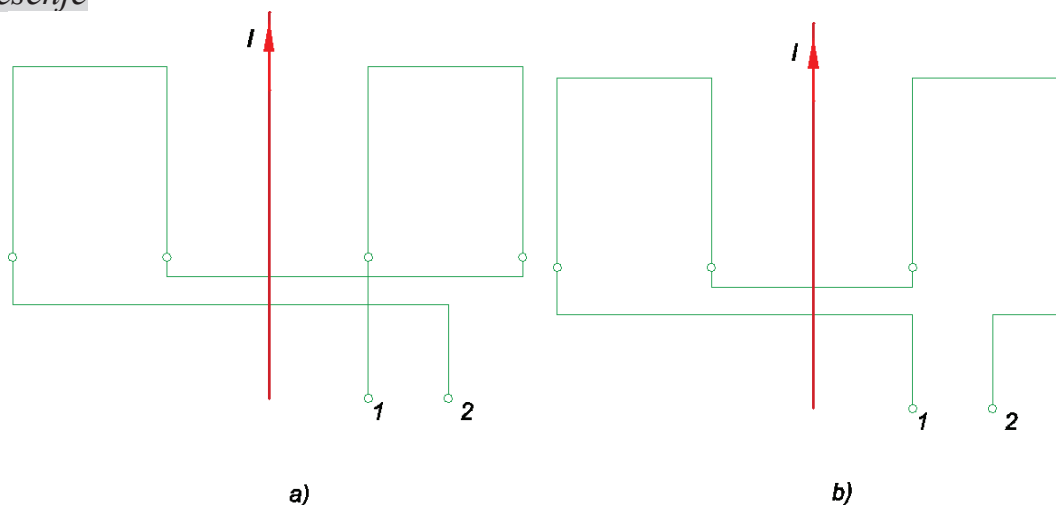
Za smjerove induciranih EMS slika 4a) i nadomjesne sheme 4b) napon između stezaljka a i b jest: $U_{ab} = +e_1 - e_2$ ($= -10$ V).



Primjer 17.1.16.

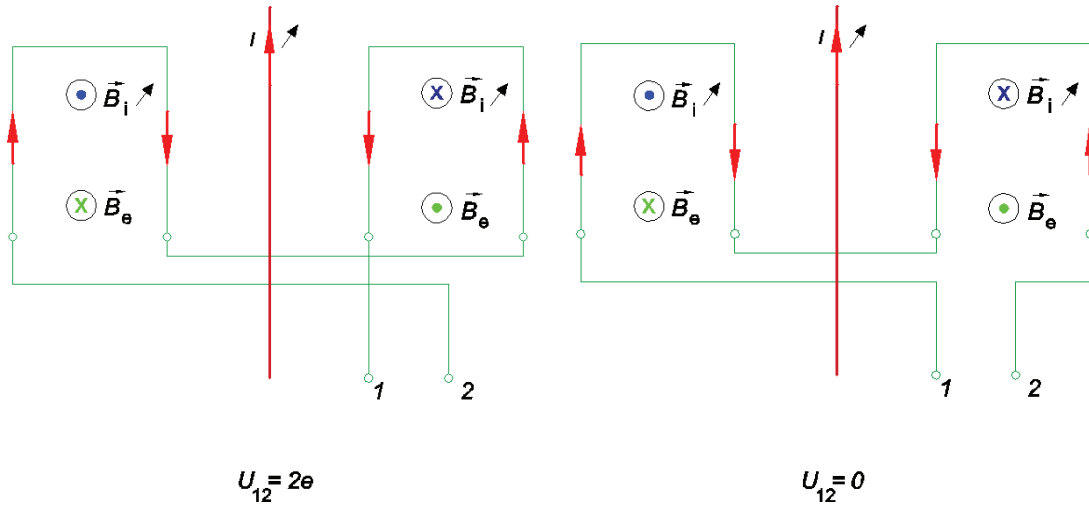
Dva međusobno jednaka zavoja i ravni, beskonačno dugi vodič leže u istoj ravnini. Ravni vodič smješten je u simetrali zavoja, vidi slike. Ako se struja u ravnom vodiču povećava/smanjuje u svakom od zavoja, inducira se EMS e . Za spojeve prema shemama 1a i 1b odredite napon između priključnica 1 i 2.

Rješenje

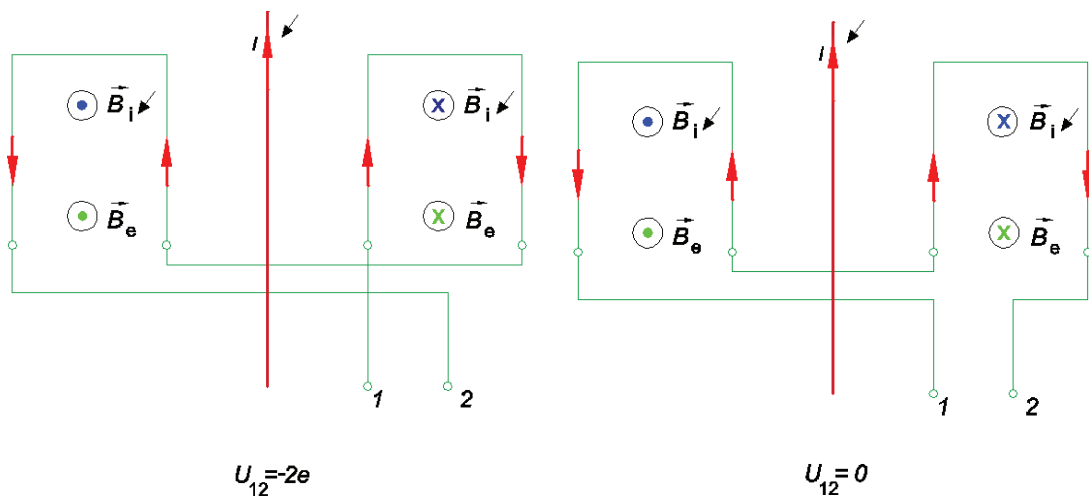


Sl. 1. Dva međusobno jednaka zavoja spojena su na dva različita načina

a) Struja vremenski raste: Ako struja vremenski raste, raste i magnetska indukcija B_1 . Smjer inducirane EMS mora biti takav da se od nje proizveden tok suprotstavlja povećanju toka svog uzročnika.



b) Struja vremenski pada: Ako struja vremenski pada, pada i magnetska indukcija B_1 . Smjer inducirane EMS mora biti takav da se od nje proizveden tok suprotstavlja opadanju toka svog uzročnika.



17.2. Samoindukcija, koeficijent samoindukcije

Samoindukcija jest pojava induciranja EMS u svitku (petlji) koji prožima vremenski promjenjivi magnetski tok, a uzrok mu je vremenski promjenjiva struja koja teče tim istim svitkom.

Prema (17.1) inducirana EMS samoindukcije jest:

$$e_s = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (17.7)$$

gdje je:

N broj zavoja svitka, a

$$\phi = \frac{iN}{R_m} \quad (17.8)$$

ϕ magnetski tok koji prožima svitak (v. odjeljak 26.1 II. Sveska)

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \left[\frac{A}{Vs} \right] \quad (17.9)$$

otpor magnetskog kruga, vidi odjeljak 26.1 II. Sveska.

Uvrštavanjem (17.8) u (17.7) uz (17.9) dobije se:

$$e_s = -L \frac{di}{dt} \quad (17.10)$$

gdje je:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \left[\frac{Vs}{A} = H \right] \quad (17.11)$$

koeficijent samoindukcije, induktivitet svitka.

Induktivitet (17.11) može se izraziti pomoću ulančenog toka, vidi odjeljak 24.2 II. Sveska:

$$L = \frac{\psi}{i} \quad (17.12)$$

gdje je:

$$\psi = N\phi \quad (17.13)$$

tok što ga ulančuju zavoji svitka.

Redosljed određivanja induktiviteta jest:

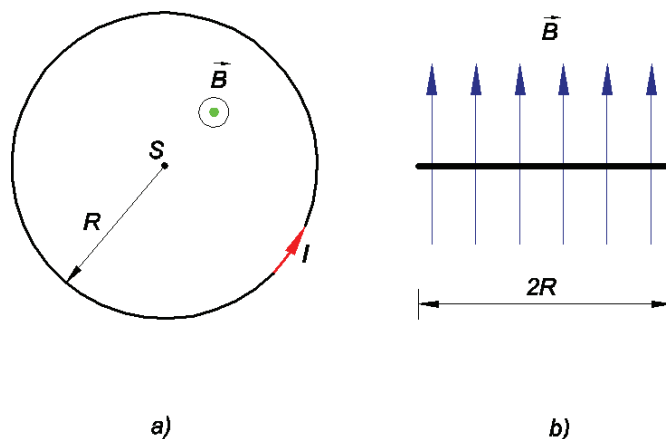
$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow L = \frac{\psi}{I} \quad (17.14)$$

Primjer 17.2.1.

Strujnom petljom kružnog oblika i radijusa R teče struja jakosti I . Odredite induktivitet ove petlje uz pretpostavku da je magnetska indukcija B u svim točkama površine petlje jednaka indukciji u njezinu središtu.

Podatci: $R = 4 \text{ cm}$, $I = 25 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Strujna petlja a) i poprečni presjek b)

Induktivitet strujne petlje odredit će se prema obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow L = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija strujne petlje u njezinu središtu, prema (3) primjera 15.2.2., jest:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (2)$$

$$\phi = BS \quad (3)$$

gdje je:

$$S = R^2 \pi \quad (4)$$

površina strujne petlje.

Uvrštavanjem (2) i (4) u (3) dobije se:

$$\phi = \frac{\mu_0 R \pi I}{2} \quad (5)$$

Ulančeni tok Ψ jednak je za $N = 1$ magnetskom toku ϕ . Slijedi, prema (1):

$$L = \frac{\mu_0 R \pi}{2} \quad (= 78,96 \text{ nH}) \quad (6)$$

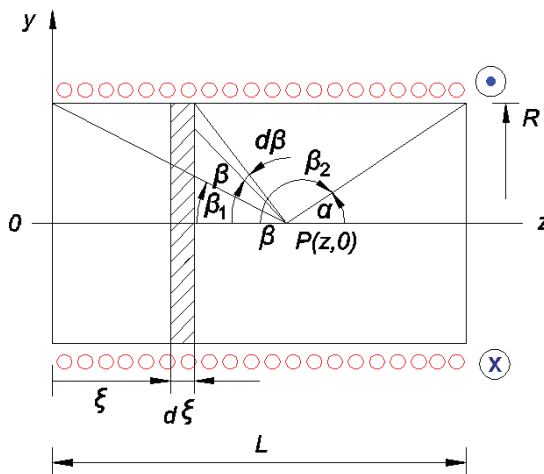


Primjer 17.2.2.

Svitak duljine L načinjen je od N zavoja kružnog oblika i srednjeg radijusa R , pri čemu je $L > R$. Odredite induktivitet ovog svitka uz pretpostavku da je indukcija B po poprečnom presjeku svitka jednaka srednjoj vrijednosti indukcije duž njegove osi.

Podatci: $N = 150$, $L = 30 \text{ cm}$, $R = 0,8 \text{ cm}$.

Rješenje



Sl. 1. Svitak duljine L načinjen je od N zavoja kružnog oblika

Induktivitet svitka odredit će se po obrascu (17.14).

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow L = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Indukcija dB_z u točki promatranja $P(z,0)$ što je stvarna broj zavoja

$$\frac{NI}{L} d\xi \quad (2)$$

na duljini svitka $d\xi$, prema (7) primjera 15.2.3., jest:

$$B_z = \frac{\mu_0 N I R^2}{2L} \int_0^L \frac{d\xi}{[(z - \xi)^2 + R^2]^{3/2}} \quad (3)$$

Iz slike 1 dobije se:

$$z - \xi = R \operatorname{ctg} \beta \quad (4)$$

$$d\xi = \frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \quad (5)$$

Uvrštavanjem (4) i (5) u (3) te uporabom trigonometrijskog identiteta

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} \quad (6)$$

dobije se:

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2L} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta \quad (7)$$

gdje je:

β kut pod kojim se iz točke promatranja P vidi svitak duljine L .

Integriranjem (7) dobije se:

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \quad (8)$$

Srednja vrijednost indukcije duž osi zavojnice jest:

$$B_{\text{sr}} = \frac{1}{L} \int_0^L B_z dz \quad (9)$$

Uvrštavanjem (8) u (9) uz:

$$\cos \beta_1 = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (10a)$$

$$\cos \beta_2 = -\cos \alpha = -\frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} \quad (10b)$$

dobije se:

$$B_{\text{sr}} = \frac{\mu_0 NI}{2L^2} \int_0^L \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} \right] dz \quad (11)$$

Integriranjem (11) dobije se:

$$B_{\text{sr}} = \frac{\mu_0 NI}{2L^2} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{R^2 + (L-z)^2} \right] \Big|_0^L \quad (12)$$

Uvrštavanjem granica dobije se:

$$B_{\text{sr}} = \frac{\mu_0 NI}{L^2} (\sqrt{R^2 + L^2} - R) \quad (13)$$

Magnetski tok kroz svitak (uz konstantnu indukciju po presjeku svitka):

$$\phi = BS = \frac{\mu_0 NIR^2 \pi}{L^2} (\sqrt{R^2 + L^2} - R) \quad (14)$$

gdje je:

$$S = R^2 \pi$$

površina poprečnog presjeka svitka.

Ulančeni tok jednak je umnošku toka ϕ i broja zavoja svitka N (svi zavoji svitka obuhvaćaju sve linije magnetskog polja, $k = N$):

$$\psi = N\phi = BS = \frac{\mu_0 N^2 IR^2 \pi}{L^2} (\sqrt{R^2 + L^2} - R) \quad (15)$$

Prema (1) iz ulančenog toka slijedi induktivitet:

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 R^2 \pi}{L^2} (\sqrt{R^2 + L^2} - R) \quad (16)$$

Za svitak kod kojeg je $L \gg R$ induktivitet jest:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 R^2 \pi}{L} \quad (17)$$

Iznos induktiviteta prema (16) i (17) jest:

$$L = 18,45 \mu\text{H} \quad , \quad L = 18,949 \mu\text{H}$$

Zaključak: Zadani svitak zadovoljava uvjet $L \gg R$.

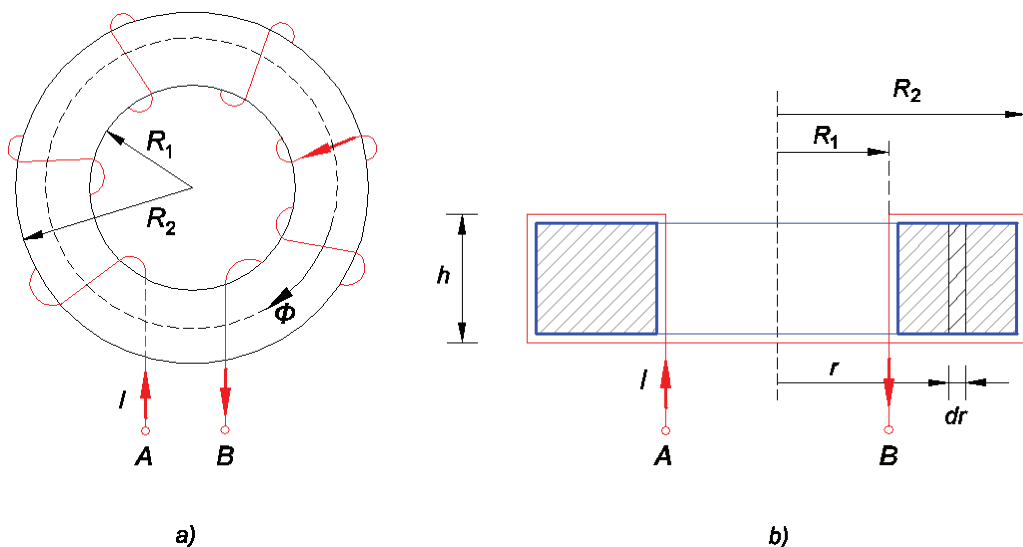


Primjer 17.2.3.

Torusna jezgra od neferomagnetskog materijala i pravokutnog presjeka $(R_2 - R_1) \times h$ namotana je s N zavoja. Zavojuima teče struja konstantne jakosti I . Odredite induktivitet zavojnice.

Podatci: $N = 150$, $I = 5 \text{ A}$, $h = 1 \text{ cm}$, $R_1 = 4,5 \text{ cm}$, $R_2 = 5,5 \text{ cm}$.

Rješenje



Sl. 1. Torusna jezgra namotana je s N zavoja a) i njezin poprečni presjek b)

Induktivitet svitka izračunat će se prema (17.14).

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \Psi \Rightarrow L = \frac{\Psi}{I} \quad (1)$$

Ako zavojima svitka teče struja konstantnog iznosa I , tada je magnetska indukcija prema (15.1):

$$B = N \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

Diferencijal magnetskog toka, uz oznake prema slici 1b), jest:

$$d\phi = B dS \quad (3)$$

gdje je:

$$dS = dr h \quad (4)$$

element površine poprečnog presjeka jezgre.

Uvrštavanjem (2) i (4) u (3) dobije se:

$$d\phi = N \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

Integriranjem (5) u granicama $[R_1, R_2]$ dobije se:

$$\phi = N \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln r \Big|_{R_1}^{R_2} = N \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (6)$$

Svi zavoji svitka ulančuju sve linije magnetskog polja pa je ulančeni tok:

$$\psi = N\phi = N^2 \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (7)$$

Prema (1) slijedi induktivitet svitka:

$$L = \frac{\mu_0 h N^2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (= 9,03 \mu\text{H}) \quad (8)$$



Primjer 17.2.4.

Ako se struja I , iz prethodnog zadatka, linearno smanji na nulu u vremenu t , odredite:

- analitički izraz za vremensku promjenu struje
- induciranu EMS
- analitički izraz za vremensku promjenu toka.

Sve dobijene rezultate prikažite grafički.

Podatci: $t = 3 \text{ ms}$.

Rješenje

a) Za zadane vrijednosti struje i vremena linearna promjena struje je pravac:

$$i = I \left(1 - \frac{10^3}{3} t \right) \quad (1)$$

b) Induciranu EMS , prema (17.10), jest:

$$e_s = -L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

gdje je ($L = 9,03 \mu\text{H}$) induktivitet izračunat u primjeru (17.2.3.).

Uvrštavanjem (1) u (2), a potom deriviranjem dobije se:

$$e_s = \frac{10^3}{3} LI \quad (= 15,05 \text{ mV}) \quad (3)$$

c) Traženi tok, prema (17.7), jest:

$$\phi = - \int_0^t \frac{e_s}{N} dt + \phi(0) \quad (4)$$

gdje je: $\phi(0) = \frac{L}{N} i(0)$, prema (1) $i(0) = I$.

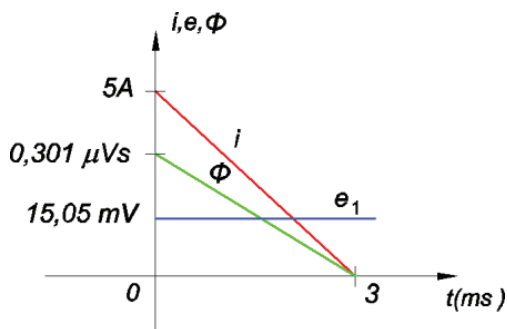
Integriranjem dobije se:

$$\phi = - \frac{e_s}{N} t + \frac{L}{N} i(0) \quad (= 0,3001 \mu\text{Vs}) \quad (5)$$

Iznosi magnetskog toka za:

$$t = 0 \quad \phi = 0,301 \mu\text{Vs}$$

$$t = 3 \text{ ms} \quad \phi = 0 \text{ Vs}$$



Napomena: Vremenska promjena magnetskog toka može se naći i na sljedeći način:

$$\psi = N\phi = Li(t) = LI\left(1 - \frac{10^3}{3}t\right) = 45,15\left(1 - \frac{10^3}{3}t\right)$$

$$\phi = \frac{\psi}{N} = 0,3001\left(1 - \frac{10^3}{3}t\right) \mu\text{Vs}$$

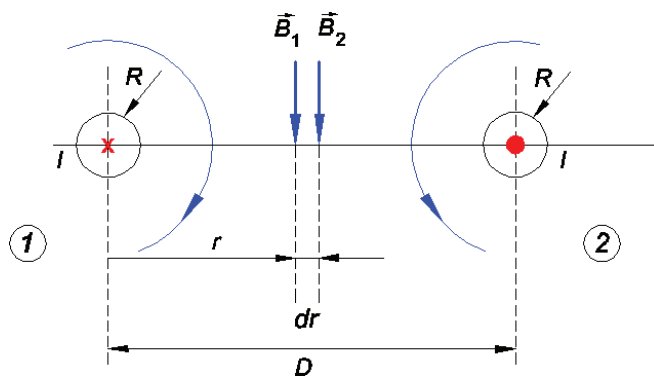


Primjer 17.2.5.

Dva ravna, beskonačno duga vodiča konačnog presjeka nalaze se na međusobnoj udaljenosti D . Vodičima teku struje jednakog iznosa, a suprotno usmjerene. Odredite induktivitet ovog voda.

Podatci: $R = 8 \text{ mm}$, $D = 2,5 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Dva vodiča čine električni vod

Induktivitet voda jednak je zbroju vanjskog i unutarnjeg induktiviteta:

$$L = L_v + 2L_u \quad (1)$$

a) vanjski induktivitet

Vanjski induktivitet voda odredit će se po obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow L = \frac{\psi}{I} \quad (2)$$

Indukcija B u točki duž spojnice dvaju vodiča jest:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad (3)$$

Budući da vektori \vec{B}_1 i \vec{B}_2 upadaju na spojnicu među vodičima pod pravim kutom, vektorski zbroj (3) prelazi u algebarski:

$$B = B_1 + B_2 \quad (4)$$

gdje je prema (3) primjera 15.2.2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5a)$$

indukcija prvog vodiča na udaljenosti za r od njega

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(D-r)} \quad (5b)$$

indukcija drugog vodiča na udaljenosti $D-r$ od njega.

Uvrštavanjem (4) i (5) u (3) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right) \quad (6)$$

Magnetski tok što ga obuhvaća vod (vod se promatra kao jedan jedini zavoj, $N = 1$) jest:

$$\phi = \psi = \int_R^{D-R} B dS \quad (7)$$

gdje je:

$$dS = dr \cdot 1 \quad (8)$$

element površine jedinične dužine.

Uvrštavanjem (6) u (7) uz (8) dobije se:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_R^{D-R} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right) dr \quad (9)$$

Integriranjem dobije se:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln r - \ln(D-r) \right] \Big|_R^{D-R} \quad (10)$$

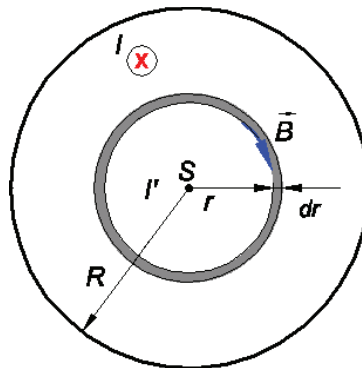
Uvrštavanjem granica i dijeljenjem sa strujom I , prema (1), dobije se induktivitet voda po jedinici duljine:

$$L_v = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-R}{R} \quad (11)$$

Budući da je $R \ll D$ približna vrijednost induktiviteta, jest:

$$L_v = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{R} \quad (= 2,29 \mu\text{H}) \quad (12)$$

b) unutarnji induktivitet



Sl. 2. B liniju na udaljenosti r od središta vodiča stvara samo dio ukupne struje vodiča

Unutarnji induktivitet vodiča odredit će se također prema obrascu (2). Indukcija na udaljenosti r od središta vodiča jest:

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \quad (13)$$

gdje je:

$$I' = \frac{r^2}{R^2} I \quad (14)$$

dio struje koji omeđuje liniju B , slika 2.

Uvrštavanjem (14) u (13) dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (15)$$

Diferencijal toka, jest:

$$d\phi = B dS \quad (16)$$

gdje je:

$$dS = dr \cdot 1 \quad (17)$$

element površine jedinične dužine.

Uvrštavanjem (17) u (16) dobije se:

$$d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r dr \quad (18)$$

Ulančeni tok, jest:

$$d\psi = k d\phi \quad (19)$$

gdje je:

$$k = \frac{\phi}{\phi_{uk}} \quad (20)$$

koeficijent ulančenja, a govori koji je dio ukupne struje obuhvatio diferencijalni tok $d\phi$. To je srazmjerno omjeru površina:

$$k = \frac{r^2 \pi}{R^2 \pi} = \frac{r^2}{R^2} \quad (21)$$

Slijedi, prema (19), ulančeni tok:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^4} \int_0^R r^3 dr$$

Integriranjem dobije se:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \quad (22)$$

Slijedi, prema (2), unutarnji induktivitet vodiča:

$$L_u = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (= 50 \text{ nH}) \quad (23)$$

Induktivitet (ukupni) dvožičnog voda, prema (1), jest:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{R} \right) \quad (= 2,39 \mu\text{H}) \quad (24)$$

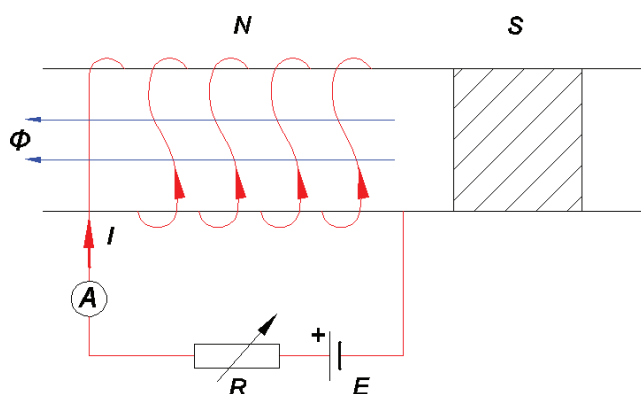


Primjer 17.2.6.

Na jezgru od neferomagnetskog materijala, presjeka S namotano je N zavoja. Mjerenje je pokazalo da se kod linearnog smanjenja struje od I_1 na I_2 linearno smanjuje magnetska indukcija u jezgri s B_1 na B_2 . Odredite induktivitet ove jezgre.

Podatci: $N = 500$, $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 12 \text{ A}$, $B_1 = 0,54 \text{ T}$, $B_2 = 1,3 \text{ T}$, $S = 8 \text{ cm}^2$.

Rješenje



Sl. 1. Promjenjivim otporom R mijenja se jakost struje u strujnom krugu

Prema (17.7) i (17.10) inducirana EMS u zavojima svitka jest:

$$e_s = -N \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$L = N \frac{d\phi}{di} \quad (2)$$

gdje je:

$$d\phi = SdB = S(B_2 - B_1) \quad (3)$$

promjena toka u jezgri

$$di = I_2 - I_1 \quad (4)$$

promjena struje u jezgri.

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) dobije se:

$$L = N \frac{S(B_2 - B_1)}{I_2 - I_1} \quad (43,4 \text{ mH}) \quad (5)$$



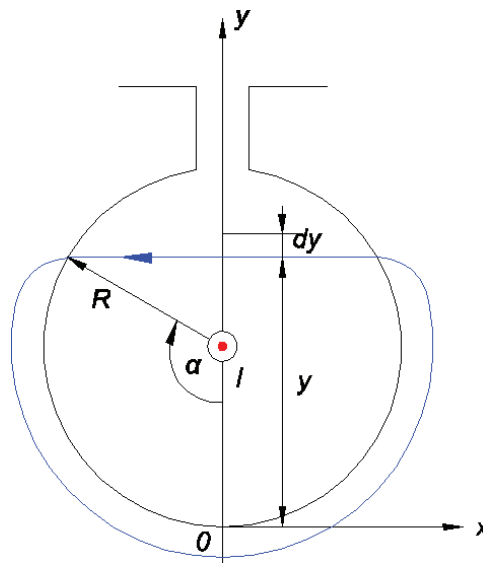
Primjer 17.2.7.

Induktivitet okruglog vodiča u utoru električnog stroja, jednostavnosti radi, računa se najčešće uz sljedeće pretpostavke:

- struja vodiča teče njegovim središtem
- linije magnetskog polja su pravci (tetive kružnice)
- nema magnetskog otpora u željezu ($\mu_{\text{Fe}} \rightarrow \infty$)

Uz navedene pretpostavke odredite induktivitet utora.

Podatci: $R = 8 \text{ mm}$, $L_{\text{Fe}} = 22 \text{ cm}$.

Rješenje

Sl. 1. Linije magnetskog polja u utoru su pravci (tetive kružnice)

Induktivitet će se odrediti prema obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow L = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija u utoru (slijedi iz Ampereova zakona) jest:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2x} \quad (2)$$

gdje je:

$$2x = 2R \sin(180^\circ - \alpha) = 2R \sin \alpha \quad (3)$$

duljina linije polja u utoru.

Diferencijal magnetskog toka jest:

$$d\phi = B dS \quad (4)$$

gdje je:

$$dS = dy L_{\text{Fe}} \quad (5)$$

element površine

$$y = R + R \cos(180^\circ - \alpha) = R - R \cos \alpha$$

$$dy = R \sin \alpha d\alpha \quad (6)$$

stranica elementa površine,
 L_{Fe} duljina utora.

Uvrštavanjem (5) i (2) u (4) dobije se:

$$d\phi = \frac{\mu_0 I L_{\text{Fe}}}{2} d\alpha \quad (7)$$

Ulančeni tok, jest:

$$d\psi = k d\phi \quad (8)$$

gdje je:

$$k = 0, \quad \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$k = 1, \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

faktor ulančenja.

Prema (8) dobije se:

$$\psi = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I L_{\text{Fe}}}{2} d\alpha = k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mu_0 I L_{\text{Fe}}}{2} d\alpha \quad (9)$$

Prvi pribrojnik u (9) jednak je nuli, a integriranjem drugog pribrojnika, uz $k = 1$, dobije se:

$$\psi = \frac{\mu_0 I \pi L_{\text{Fe}}}{4} \quad (10)$$

Prema (2) induktivitet okruglog utora:

$$L = \frac{\mu_0 \pi L_{\text{Fe}}}{4} \quad (= 0,217 \mu\text{H}) \quad (11)$$



17.3. Međusobna indukcija, koeficijent međuindukcije

Međuindukcija jest pojava induciranja *EMS* u svitku (petlji) koji prožima vremenski promjenjivi magnetski tok, a uzrok mu je vremenski promjenjiva struja koja teče drugim svitkom.

Prema (17.1) inducirana *EMS* međusobne indukcije jest:

$$e_m = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad (17.15)$$

gdje je:

N_2 broj zavoja drugog svitka u kojem se inducira *EMS* međusobne indukcije, a

$$\phi_{12} = \frac{N_1 i_1}{R_{m12}} \quad (17.16)$$

ϕ_{12} magnetski tok prvog svitka, na mjestu drugog svitka (v. odjeljak 26.1. II. Sveska),

$$R_{m12} = \frac{l_{12}}{\mu S} \left[\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \right] \quad (17.17)$$

magnetski otpor kruga (v. odjeljak 26.1. II. Sveska).

Uvrštavanjem (17.16) u (17.15) uz (17.17) dobije se:

$$e_m = -M \frac{di_1}{dt} \quad (17.18)$$

gdje je:

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_{m12}} \left[\frac{Vs}{A} = H \right] \quad (17.19)$$

koeficijent međusobne indukcije, međuinduktivitet može se izraziti pomoću ulančenog toka, vidi odjeljak 24.3 II. Sveska.

$$M = \frac{\psi}{I_1} \quad (17.20)$$

gdje je:

$$\psi = N_2 \phi_{12} \quad (17.21)$$

tok stvoren svitkom 1 a ulančuje ga N_2 zavoja svitka 2.

Redosljed određivanja međuinduktiviteta jest:

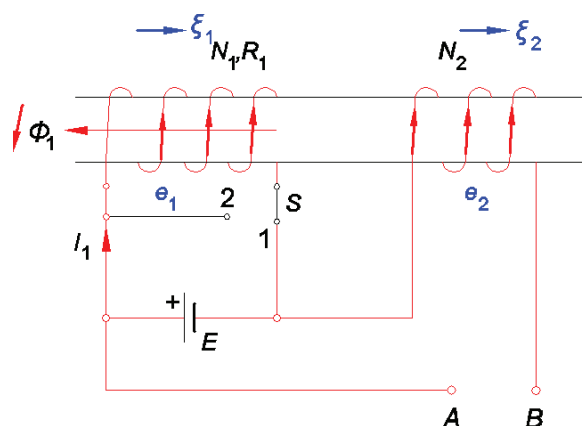
$$B \Rightarrow \phi_{12} \Rightarrow \psi_{12} \Rightarrow M = \frac{\psi}{I_1}$$

Primjer 17.3.1.

Na neferomagnetskoj jezgri namotane su dvije zavojnice s N_1 odnosno N_2 zavoja. Ukupni tok što ga stvara prva zavojnica ulančuje drugu zavojnicu (faktor magnetske sprege jest $k=1$). Nakon otvaranja sklopke S , slika 1, struja kroz prvu zavojnicu pada na nulu u vremenu Δt . Odredite koliki je prosječni iznos napona na otvorenim priključnicama AB za vrijeme promjene struje kroz prvu zavojnicu.

Podatci: $R_1 = 8\Omega$, $E = 160V$, $N_1 = 200$, $N_2 = 2000$, $L_1 = 0,95\text{mH}$,
 $\Delta t = 0,5\text{ms}$.

Rješenje

Sl. 1. Struja naponskog izvora stvara magnetski tok ϕ_1

Protjecajem struje I_1 kroz zavoje prve zavojnice s N_1 zavoja stvara se magnetski tok (sklopka S u položaju 1):

$$\phi = \frac{N_1 I_1}{R_m} \quad (1)$$

gdje je:

R_m - magnetski otpor.

Prebacivanjem sklopke S iz položaja 1 u položaj 2 dolazi do razgradnje magnetskog polja akumuliranog u prvoj zavojnici - magnetski tok ϕ_1 opada. Posljedica smanjenja magnetskog toka u prvoj odnosno drugoj zavojnici jest pojava EMS samoindukcije u prvoj odnosno EMS međusobne indukcije u drugoj zavojnici. Smjer EMS ξ je takav, prema Lentzu, da nastoji sačuvati magnetski tok ϕ_1 , slika 1.

$$U_{AB} = E - \xi_2 \quad (2)$$

gdje je prema (17.15):

$$\xi_2 = -N_2 \frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} \quad (3)$$

prosječni iznos inducirane EMS u drugoj zavojnici.

Prosječni iznos inducirane EMS u prvoj zavojnici prema (17.7) i (17.10) jest:

$$E_1 = -N_1 \frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} \quad (4)$$

Iz (4) dobije se promjena magnetskog toka:

$$\Delta\phi_1 = \frac{L_1}{N_1} \Delta i_1 \quad (5)$$

gdje je:

$$\Delta i_1 = I_1 - 0 = I_1 \quad \left(= \frac{E}{R_1} = 20 \text{ A} \right) \quad (6)$$

promjena struje u prvoj zavojnici.

Uvrštavanjem (5) u (3) dobije se:

$$\xi_2 = -\frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} \quad (= 380 \text{ V}) \quad (7)$$

U iznosu ξ_2 , jednačba (7), izostavljen je predznak minus jer ga sadržava smjer ξ_2 na slici 1, odnosno jednačbi (2). Uvrštavanjem (7) u (2) uz zadani E dobije se: tada je $U_{AB} = -220 \text{ V}$.

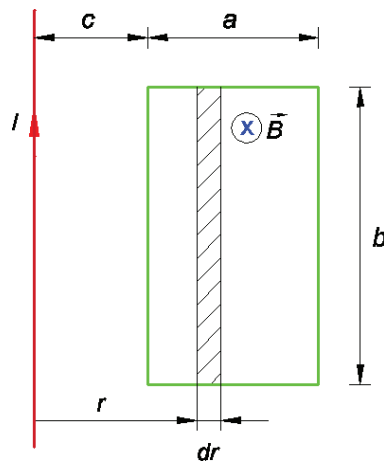


Primjer 17.3.2.

Pravokutna petlja dimenzija $a \times b$ ima N zavoja i leži u istoj ravnini s beskonačno dugim, ravnim vodičem, slika 1. Odredite međuinduktivitet petlje i vodiča.

Podatci: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$, $N = 350$.

Rješenje



Sl. 1. Istosmjerna struja vodiča u svom okolišu stvara nehomogeno vremenski konstantno polje.

Međuinduktivitet vodič-petlja odredit će se po obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow M = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija ravnog vodiča, prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Magnetski tok, prema (14.4), jest:

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (3)$$

gdje je:

$$d\vec{S} = b dr \vec{e}_\varphi \quad (4)$$

element površine.

Budući da linije magnetskog polja upadaju pod pravim kutom na površinu omeđenu zavojima petlje, vektori \vec{B} i $d\vec{S}$ međusobno su kolinearni pa skalarni umnožak (3) prelazi u algebarski.

Uvrštavanjem (2) i (4) u (3) dobije se:

$$d\phi = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

Ulančeni tok jednak je umnošku broja zavoja i toka:

$$d\psi = Nd\phi \quad (6)$$

Uvrštavanjem (5) u (6) uz naznaku integriranja dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IbN}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{dr}{r} \quad (7)$$

Integriranjem dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IbN}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} \quad (8)$$

Iz (8) prema (1) dobije se:

$$M = \mu_0 \frac{bN}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} \quad (= 23,07 \mu\text{H}) \quad (9)$$

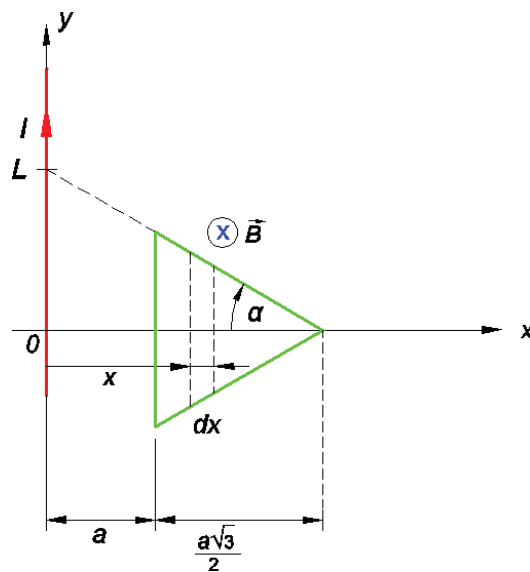


Primjer 17.3.3.

Petlja s N zavoja ima oblik jednakostraničnog trokuta. Petlja i ravni, beskonačno dugi vodič leže u istoj ravnini, slika 1. Odredite međuinduktivitet petlje i vodiča.

Podatci: $a = 10 \text{ cm}$, $N = 400$.

Rješenje



Sl. 1. Jedna stranica jednakostranične petlje paralelna je s ravnim vodičem

Međuintuktivitet vodiča i petlje odredit će se po obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow M = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija ravnog vodiča, prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Magnetski tok, prema (14.4), jest:

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (3)$$

gdje je:

$$d\vec{S} = y dx \vec{e}_\varphi \quad (4)$$

element površine.

Budući da linije magnetskog polja upadaju pod pravim kutom na površinu omeđenu zavojima petlje, vektori \vec{B} i $d\vec{S}$ kolinearni su vektori, vidi objašnjenje u prethodnom zadatku, pa skalarni umnožak prelazi u algebarski.

Uvrštavanjem (2) i (4) u (3) dobije se:

$$d\phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} y dx \quad (5)$$

gdje je:

$$y = -kx + L \quad (6)$$

jednadžba pravca jedne stranice istostraničnog trokuta, vidi sliku 1.

U (6) jesu:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (= 0,577) \quad (7)$$

koeficijent smjera pravca

$$L = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} a \right) \quad (= 0,1077 \text{ m}) \quad (8)$$

odsječak pravca na osi ordinata.

Uvrštenjem (6) u (5) dobije se:

$$d\phi = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-k + \frac{L}{x} \right) dx \quad (9)$$

U jednadžbi (9) tok je, zbog integriranja u granicama $[0, y]$, uzet dvostruki.

Ulančeni tok jednak je umnošku toka i broja zavoja:

$$d\psi = N d\phi \quad (10)$$

Uvrštavanjem (9) u (10) uz naznake integracije dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IN}{\pi} \int_a^{a+\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left(-k + \frac{L}{x} \right) dx \quad (11)$$

Integriranjem dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IN}{\pi} \left(-kx + L \ln x \right) \Big|_a^{a+\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Uvrštavanjem granica dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IN}{\pi} \left(-k \frac{a\sqrt{3}}{2} + L \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right) \quad (12)$$

Iz (12) slijedi međuinuktivitet:

$$M = \mu_0 \frac{N}{\pi} \left(-k \frac{a\sqrt{3}}{2} + L \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right) \quad (= 2,75 \mu\text{H}) \quad (13)$$

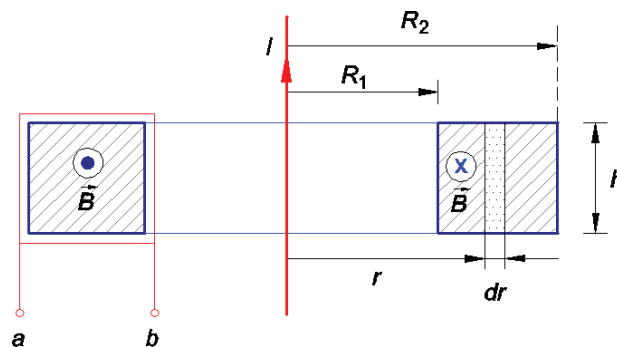


Primjer 17.3.4.

Na torusnu jezgru pravokutnog presjeka namotano je N zavoja. Jezgra je načinjena od materijala linearnih karakteristika i ima dimenzije R_1 , R_2 , h . U osi torusne jezgre smješten je ravni, beskonačno dugi vodič kojim teče struja jakosti I . Odredite međuinuktivitet vodiča i zavojnice.

Podatci: $R_1 = 8 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$, $h = 3 \text{ cm}$, $N = 550$.

Rješenje



Sl. 1. Ravni vodič smješten u osi torusne jezgre

Međuinuktivitet vodič-petlja odredit će se po obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow M = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija ravnog vodiča, prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Magnetski tok, prema (14.4), jest:

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (3)$$

gdje je:

$$d\vec{S} = h dr \vec{e}_\varphi \quad (4)$$

element površine petlje.

Budući da su vektori \vec{B} i $d\vec{S}$ međusobno kolinearni vektori, više vidi u primjeru 17.3.1, magnetski tok, prema (3), jest:

$$d\phi = \mu_0 \frac{Ih}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

Ulančeni tok jednak je umnošku magnetskog toka i broja zavoja:

$$d\psi = Nd\phi \quad (6)$$

Uvrštavanjem (5) u (6) uz naznaku integriranja dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IhN}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \quad (7)$$

Integriranjem dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IhN}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (8)$$

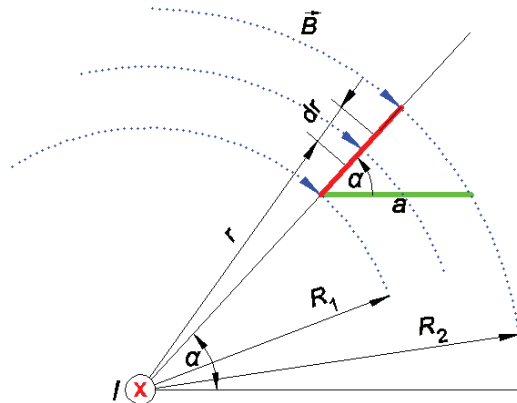
Iz (8) prema (1) dobije se:

$$M = \mu_0 \frac{hN}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (= 0,736 \mu\text{H}) \quad (9)$$



Primjer 17.3.5.

Pravokutna petlja dimenzija $a \times b$ prožima magnetsko polje indukcije \vec{B} . Magnetsku indukciju stvara beskonačno dugi, ravni vodič kojim teče struja jakosti I . Vodič i petlja ne leže u istoj ravnini, slika 1. Stranica b petlje paralelna je ravnom vodiču. Odredite međuinduktivitet vodiča i petlje. Podatci: $a = 20\text{ cm}$, $b = 30\text{ cm}$, $R_1 = 50\text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$, $N = 400$.

Rješenje

Sl. 1. Položaj pravokutne petlje određen je udaljenošću R_1 i kutom α

Međuinduktivitet vodič-petlja odredit će se po obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow M = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija ravnog vodiča, prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Magnetski tok, prema (14.4), jest:

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (3)$$

gdje je:

$$d\vec{S} = b dr \vec{e}_\varphi \quad (4)$$

element efektivne površine petlje kolinearne s indukcijom.

Treba uočiti da magnetske linije prožimaju samo efektivnu površinu petlje:

$$S_{\text{ef}} = S \cos \alpha = ab \cos \alpha \quad (5)$$

Uvrštavanjem (2) i (4) u (3) uz objašnjenja u primjeru 17.3.1, magnetski tok jest:

$$d\phi = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (6)$$

Ulančeni tok jednak je umnošku magnetskog toka i broja zavoja:

$$d\psi = Nd\phi \quad (7)$$

Uvrštavanjem (6) u (7), uz naznaku integriranja, dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IbN}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \quad (8)$$

gdje je:

$$R_2 = R_1 + a \cos \alpha \quad (9)$$

Integriranjem dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{IbN}{2\pi} \ln \frac{R_1 + a \cos \alpha}{R_1} \quad (10)$$

Iz (10) prema (1) dobije se:

$$M = \mu_0 \frac{bN}{2\pi} \ln \frac{R_1 + a \cos \alpha}{R_1} \quad (= 6,415 \mu\text{H}) \quad (11)$$

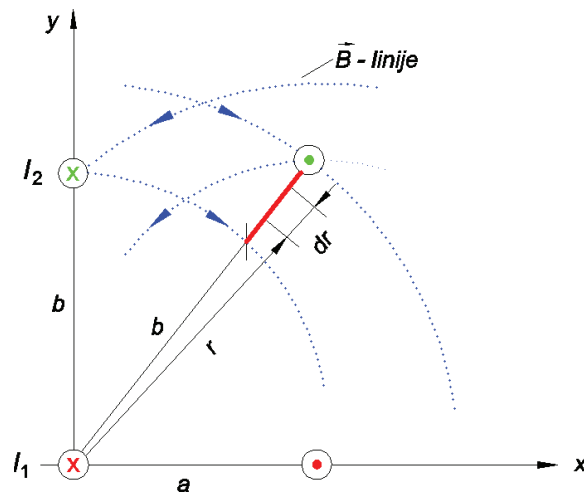


Primjer 17.3.6.

Dva voda međusobno su paralelna, a njihovi tragovi u ravnini okomitoj na njih čine vrhove pravokutnika, slika 1. Ako vodovima teku konstantne struje I_1 i I_2 , odredite koeficijent međuindukcije po jedinici duljine.

Podatci: $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$.

Rješenje



Sl. 1. Vod 2 ulančuje samo dio linija polja što ih uzrokuje vod 1

Međuinduktivitet petlja-petlja odredit će se po obrascu (17.14):

$$B \Rightarrow \phi \Rightarrow \psi \Rightarrow M = \frac{\psi}{I} \quad (1)$$

Magnetska indukcija ravnog vodiča, prema (11) primjera 15.1.1, jest:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Magnetski tok, prema (14.4), jest:

$$d\phi = \vec{B} d\vec{S} \quad (3)$$

gdje je:

$$d\vec{S} = dr \cdot 1 \vec{e}_\varphi \quad (4)$$

element efektivne površine petlje kolinearan s indukcijom.

Budući da su vektori \vec{B} i $d\vec{S}$ međusobno kolinearni vektori skalarni umnožak (3) prelazi u algebarski umnožak. Uvrštavanjem (2) i (4) u (3) dobije se:

$$d\phi = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (5)$$

Diferencijal toka (5) jest tok samo jednog vodiča voda, dok je ukupni tok - zbog simetrije, dvostruko veći (utjecaj drugog vodiča):

$$d\phi = 2\mu_0 \frac{I_1}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (6)$$

Ulančani tok jednak je umnošku magnetskog toka i broja zavoja:

$$d\psi = Nd\phi \quad (7)$$

Broj zavoja $N = 1$ (vod 2 promatra se kao jedan zavoj).

Integriranjem (7) dobije se:

$$\psi = \mu_0 \frac{I_1}{\pi} \int_b^d \frac{dr}{r} \quad (8)$$

gdje je:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (= 3,6\text{ m}) \quad (9)$$

dijagonala pravokutnika.

$$\psi = \mu_0 \frac{I_1}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (10)$$

Iz (10) prema (1) slijedi međuinduktivitet:

$$M = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (= 0,0735 \mu\text{H/m}) \quad (11)$$

Napomena: Samo dio magnetskog toka što ga stvara vod 1 ulančuje vod 2.



18. MATERIJALI U MAGNETSKOM POLJU

18.1. Vektor magnetiziranja i Opći oblik Ampereova zakona.

Ovaj vektor, prema (25.5), jest:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V} \quad (18.1.1)$$

gdje je:

$$\vec{m}_i = I_a \Delta \vec{S}_i = I_a \Delta S_i \vec{n}_0 \quad (18.1.2)$$

\vec{m}_i - magnetski moment strujne petlje. Ovaj moment jednak je umnošku struje petlje i površine koju omeđuje petlja

I_a - Ampereova struja (struja strujnog vrtloga)

\vec{n}_0 - jedinični vektor plohe $\Delta \vec{S}_i$, usmjeren u smjeru magnetskog polja petlje

$$\Delta V = S \Delta l \quad (18.1.3)$$

ΔV - element obujma magnetskog materijala.

Uvrštavanjem (18.1.2) i (18.1.3) u (18.1.1) dobije se:

$$\vec{M} = \frac{I_a}{\Delta l} \vec{n}_0 \quad (18.1.4)$$

odakle slijedi Ampereova struja:

$$I_a = \vec{M} \Delta \vec{l} \quad (18.1.5)$$

Vektor magnetiziranja, eksperimentalno je utvrđeno, proporcionalan je magnetskoj indukciji B :

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B} = \chi_m \vec{H} \quad (18.1.6)$$

gdje je χ_m magnetska susceptibilnost (sposobnost magnetiziranja materijala).

Opći oblik Ampereova zakona glasi: Integral po zatvorenoj krivulji K , skalarnog umnoška jakosti magnetskog polja \vec{H} i elementa puta krivulje $d\vec{l}$ jednak je sumi struja obuhvaćenih tom krivuljom, prema (25.39), jest:

$$\oint_K \vec{H} d\vec{l} = \sum_m I_m \quad (18.1.7)$$

gdje je:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (18.1.8)$$

jakost magnetskog polja prema (25.38) II. Sveska

$$B = \mu_r H \quad (18.1.9)$$

μ_r - relativna permeabilnost.

Primjer 18.1.1.

Na feromagnetsku jezgru cilindričnog oblika, relativne permeabilnosti μ_r , duljine L i presjeka S namotano je N zavoja kojima teče struja jakosti I . Nakon prekida struje zaostali magnetizam u jezgri iznosio je B_R . Odredite površinski iznos Ampereove struje i vektor magnetiziranja uz pretpostavku da je jezgra homogeno magnetizirana.

Podatci: $B_R = 1,5 \text{ mT}$, $L = 10 \text{ cm}$, $S = 3 \text{ cm}^2$, $\mu_r = 6$.

Rješenje Vektor magnetiziranja, prema (18.1.6), jest:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B} \quad (1)$$

gdje je:

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (2)$$

magnetska susceptibilnost.

Budući da su \vec{M} i \vec{B} međusobno kolinearni vektori, može se govoriti o iznosu vektora magnetiziranja.

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$M = \frac{1}{\mu_0}(\mu_r - 1)B \quad (= 5,96 \text{ kA/m}) \quad (3)$$

Površinski iznos Ampereove struje, prema (18.1.5), jest:

$$I_a = ML \quad (= 0,596 \text{ kA}) \quad (4)$$



Primjer 18.1.2.

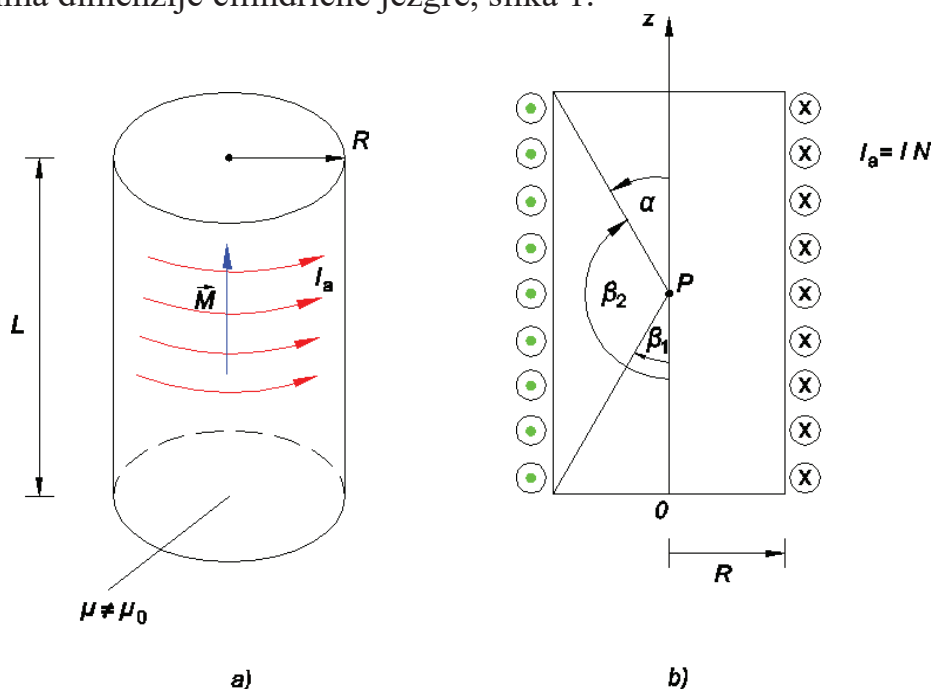
Željezna jezgra cilindričnog oblika homogeno je magnetizirana u aksijalnom smjeru. Odredite raspodjelu magnetske indukcije duž osi cilindra.

Podatci: $M = 1,5 \cdot 10^5 \text{ A/m}$, $L = 30 \text{ cm}$, $R = 1,5 \text{ cm}$.

Rješenje Ampereova struja homogeno magnetiziranog cilindra, a koja teče njegovom površinom, prema (18.1.5), jest:

$$I_a = ML \quad (= 0,45 \cdot 10^5 \text{ A}) \quad (1)$$

Površinska Ampereova struja ekvivalentna je amper-zavojima NI svitka u zraku i ima dimenzije cilindrične jezgre, slika 1.



Sl. 1. Površinske Ampereove struje a) zamjenjuju se amper-zavojima NI b)

Indukcija u osi svitka, slika 1b, a u točki promatranja P, prema (8) primjera 17.2.2, jest:

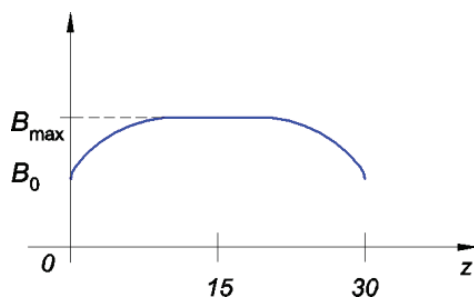
$$B_z = \frac{\mu_0 I_a}{2L} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \quad (2)$$

gdje je:

$$\cos \beta_1 = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta_2 = -\frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}}$$

kosinusi kuteva β_1 i β_2 pod kojim se iz točke promatranja P vidi početak i kraj svitka.



Sl. 2. Raspodjela indukcije duž osi željezne jezgre

Magnetska indukcija prema (2) najmanja je na početku/kraju cilindra ($B_0 = 94,07 \text{ mT}$), a najveća je u sredini cilindra ($B_{\max} = 183,125 \text{ mT}$).



Primjer 18.1.3.

Koristeći rezultate dobijene u prethodnom primjeru, 18.1.2, odredite smjerove vektora: indukcije, magnetiziranja i jakosti magnetskog polja duž osi feromagnetskog cilindra.

Rješenje Homogeno magnetizirani cilindar, prema primjeru 18.1.2, ekvivalentan je svitku istih dimenzija. Slijedi, magnetska indukcija u osi feromagnetskog cilindra, prema (2) istog primjera jest:

$$B_z = \frac{\mu_0 I_a}{2L} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \quad (1)$$

ili:

$$\vec{B} = B\vec{e}_z = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \quad (2)$$

gdje je:

$$\vec{M} = \frac{I_a}{L} \vec{e}_z \quad (3)$$

vektor magnetiziranja.

Slijedi vektori \vec{B} i \vec{M} istog su smjera, \vec{e}_z .

Vektor jakosti magnetskog polja, prema (18.1.8), jest:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (4)$$

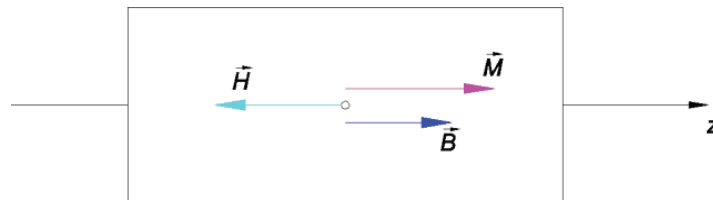
Uvrštavanjem (2) u (4) dobije se:

$$\vec{H} = \vec{M} \left(\frac{\cos \beta_1 - \cos \beta_2}{2} - 1 \right) \quad (5)$$

Budući da je:

$$\frac{\cos \beta_1 - \cos \beta_2}{2} - 1 < 0 \quad (6)$$

Slijedi da je vektor \vec{H} suprotan vektoru \vec{B} odnosno \vec{M} , slika 1.



Sl. 1. Vektori \vec{B} i \vec{M} kolinearni su dok je vektor \vec{H} suprotan

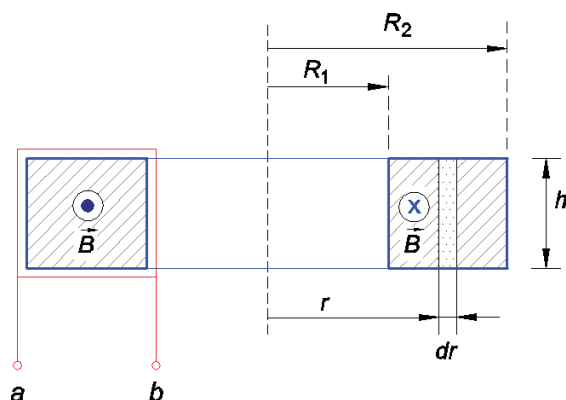
Van feromagnetskog cilindra, dakle u vakumu (zraku), vektori \vec{B} i \vec{H} kolinearni su vektori, $\vec{M} = 0$.



Primjer 18.1.4.

Na torusnu feromagnetsku jezgru, izmjera R_1 R_2 , h , gusto je namotano N zavoja. Zavojima teče konstantna struja jakosti I . Pri ovoj je struji u jezgri indukcija B . Odredite jakost magnetskog polja \vec{H} , vektor magnetiziranja \vec{M} i Ampereove struje I_a na površini torusne jezgre. Prije uspostavljanja magnetskog polja u jezgri jezgra je bila nemagnetična.

Podatci: $R_1 = 4 \text{ cm}$, $R_2 = 4,4 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$, $B = 0,8 \text{ T}$, $I = 0,8 \text{ A}$, $N = 320$.

Rješenje

Sl. 1. Torusna jezgra je tanka, R_1 je neznatno manji od R_2

Budući da je torusna jezgra tanka, može se pretpostaviti, uz dovoljno točnosti, da je jakost magnetskog polja konstantna duž radijusa r pa se za duljinu linija polja može uzeti srednja duljina:

$$R_s = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (= 4,2 \text{ cm}) \quad (1)$$

Slijedi, prema (18.1.7), jakost magnetskog polja:

$$H = \frac{NI}{2\pi R_s} \quad (= 970 \text{ A/m}) \quad (2)$$

Vektor magnetiziranja, prema (18.1.8), jest:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (= 635,65 \text{ kA/m}) \quad (3)$$

Budući da feromagnetska jezgra prethodno nije bila magnetizirana, kako je vidljivo iz (3), $\vec{M} > 0$, vektor magnetiziranja i vektor jakosti magnetskog polja istog su smjera.

Ampereova struja, prema (18.1.5), jest:

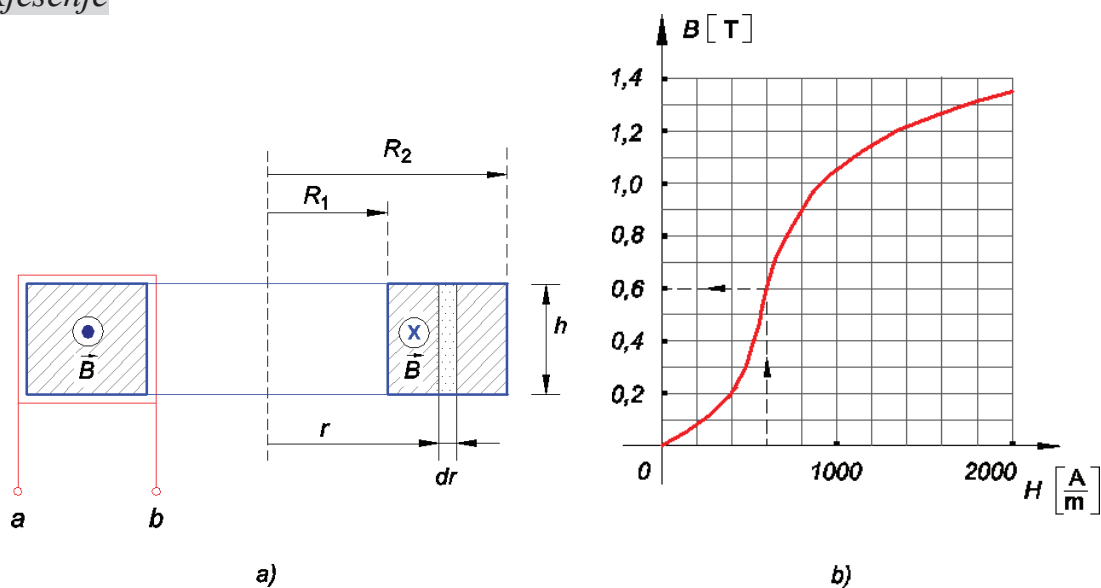
$$I_a = \vec{M} \Delta \vec{l} = M 2\pi R_s \quad (=16,77 \text{ kA}) \quad (4)$$



Primjer 18.1.5.

Na torusnu feromagnetsku jezgru pravokutnog presjeka gusto je namotano N zavoja. Zavojima teče struja konstantne jakosti I . Pri ovoj je struji u jezgri indukcija B . Odredite vektor magnetiziranja i površinske Ampereove struje. Podatci: $R_1 = 3 \text{ cm}$, $R_2 = 3,5 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$, $I = 0,5 \text{ A}$, $N = 260$, $B - H$ karakteristika .

Rješenje



Sl. 1. Feromagnetska jezgra gusto je namotana s N zavoja a) i $B - H$ karakteristika b)

Vektor magnetiziranja \vec{M} , prema (18.1.8), jest:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (1)$$

Za zadane dimenzije jezgre i broj amper-zavoja jakost magnetskog polja, prema (18.1.7), jest:

$$H = \frac{NI}{2\pi R_s} \quad (= 636,66 \text{ A/m}) \quad (2)$$

gdje je:

$$R_s = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (= 3,25 \text{ cm}) \quad (3)$$

srednja duljina linija polja.

Budući da je torusna jezgra tanka, $(R_2 - R_1) < R_s$, može se smatrati da je jakost magnetskog polja u svim točkama poprečnog presjeka jednake jakosti polja srednje linije polja.

Za izračunati jakost magnetskog polja, slika 1b, iz B - H karakteristike očitava se magnetska indukcija u jezgri, $B = 0,6 \text{ T}$.

S izračunatim i očitanim vrijednostima, prema (1), dobije se:

$$M = 476,82 \cdot 10^3 \text{ A/m}.$$

Ampereova struja, prema (18.1.5), jest:

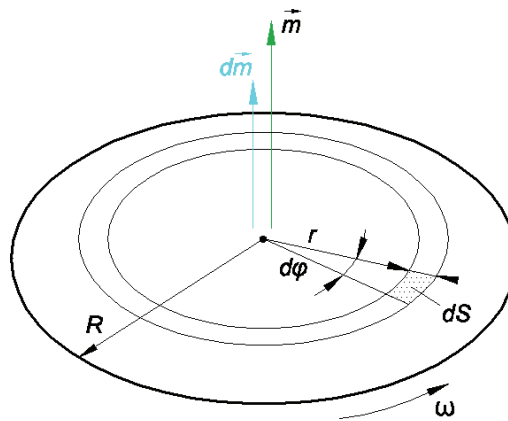
$$I_a = \vec{M} \Delta \vec{l} = M 2\pi R_s \quad (= 97,37 \text{ kA}) \quad (4)$$



Primjer 18.1.6.

Disk radijusa R i zanemarive debljine načinjen je od dielektričnog materijala. Disk je nabijen nabojem plošne gustoće naboja σ . Ako se disk vrti konstantnom kutnom brzinom ω , odredite njegov magnetski moment. Podatci: $\omega = 120 \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 200 \text{ } \mu\text{As/m}^2$, $R = 9 \text{ cm}$.

Rješenje



Sl. 1. Nabijeni disk vrti se konstantnom kutnom brzinom ω

Magnetski dipolni moment strujne petlje, prema (18.1.2), jest:

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{n}_0 \quad (1)$$

Magnetski moment strujne petlje okomit je na površinu koju omeđuje strujna petlja.

Količina naboja koju nosi element površine dS , v.(P 7.6) I. Sveska:

$$dq = \sigma dS = \sigma r d\varphi dr \quad (2)$$

a giba se brzinom v jest usmjereno gibanje naboja-električna struja.

Slijedi, strujna petlja radijusa r stvara magnetski moment:

$$d\vec{m} = dI S_r \vec{n}_0 \quad (3)$$

gdje je:

$$S_r = r^2 \pi \quad (4)$$

dio površine diska radijusa r

$$dI = \frac{dq}{dt} \quad (5)$$

struja strujne „petlje“

$$dq = \sigma dS \quad (6)$$

količina naboja na elementu površine dS .

Uvrštavanjem (6) u (5) uz (2) dobije se:

$$dI = \sigma r dr \frac{d\varphi}{dt} \quad (7)$$

gdje je:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (8)$$

kutna brzina vrtnje diska.

Jednadžba (7) uz (8) postaje:

$$dI = \omega \sigma r dr \quad (9)$$

Uvrštavanjem (4) i (9) u (3) dobije se:

$$d\vec{m} = \omega \sigma \pi r^3 dr \vec{n}_0 \quad (10)$$

Integriranjem u granicama $[0, R]$ dobije se:

$$\vec{m} = \frac{1}{4} \omega \sigma \pi R^4 \vec{n}_0 \quad (= 1,23 \mu\text{Am}^2) \quad (11)$$

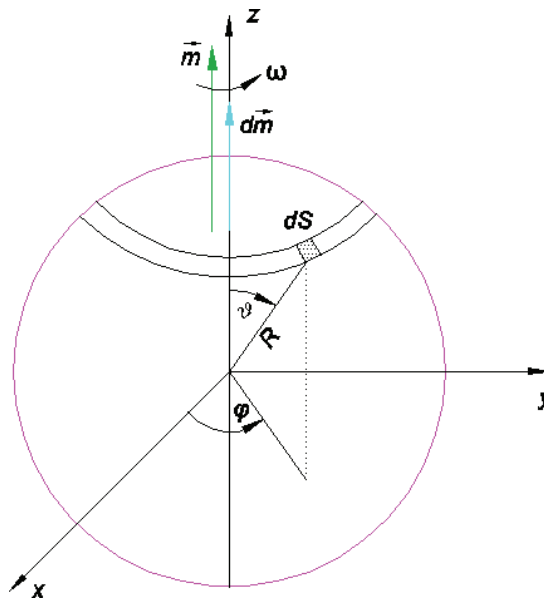


Primjer 18.1.7.

Dielektrična kugla zanemarive debljine stijenke nabijena je nabojem plošne gustoće σ . Ako se kugla vrti konstantnom kutnom brzinom ω , odredite njezin magnetski moment.

Podatci: $\omega = 120 \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 250 \mu\text{As/m}^2$, $R = 10 \text{ cm}$.

Rješenje



Sl. 1. Nabijena dielektrična kugla vrti se konstantnom kutnom brzinom ω

Magnetski dipolni moment strujne petlje, prema (18.1.2), jest:

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{n}_0 \quad (1)$$

Magnetski moment strujne petlje okomit je na plohu koju omeđuje strujna petlja.

Količina naboja koju nosi element površine dS , v.(P 7.7) I. Sveska:

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (2)$$

a giba se brzinom v jest usmjereno gibanje naboja, električna struja.

$$dI = \frac{dq}{dt} = \sigma R^2 \omega \sin \vartheta d\vartheta \quad (3)$$

gdje je:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

kutna brzina.

Slijedi, strujna petlja radijusa $R \sin \vartheta$ stvara magnetski moment:

$$d\vec{m} = dI S_r \vec{n}_0 \quad (5)$$

gdje je:

$$S_r = (R \sin \vartheta)^2 \pi \quad (6)$$

površina obuhvaćena „strujnom petljom“.

Uvrštavanjem (3) i (6) u (5) dobije se:

$$\vec{m} = \int_0^\pi \omega \sigma R^4 \pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \vec{n}_0 \quad (7)$$

Da bi se obuhvatile sve strujne petlje, mora se integrirati po kutu $\vartheta(0, \pi)$.

Za riješiti integral (7) koristite supstituciju $\cos \vartheta = u$, te adicioni teorem $\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta$. S navedenom supstitucijom i integriranjem dobije se:

$$\vec{m} = \omega \sigma R^4 \pi \left[\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta - \cos \vartheta \right]_0^\pi \vec{n}_0 \quad (8)$$

Uvrštavanjem granica dobije se:

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \omega \sigma R^4 \pi \vec{n}_0 \quad (= 12,57 \mu\text{Am}^2) \quad (9)$$

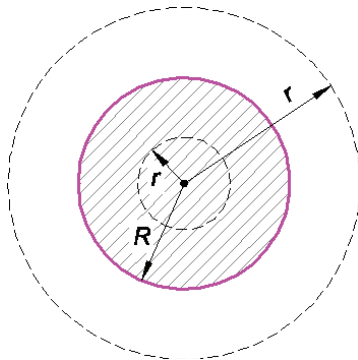


Primjer 18.1.8.

Beskonačno dugim, ravnim bakrenim vodičem konačnog presjeka teče struja konstantne jakosti I . Odredite, upotrebom Ampereova zakona, jakost magnetskog polja u funkciji radijusa r .

Podatci: $R = 10 \text{ cm}$, $I = 250 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Ravnim cilindričnim vodičem teče struja konstantne jakosti

Budući da su relativne permeabilnosti zraka i vakuma međusobno jednake, i $\mu_r = 1$, vektor indukcije proporcionalan je vektoru jakosti magnetskog polja:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1)$$

Vektor magnetske indukcije ravnog beskonačno dugog vodiča kojim teče struja jakosti I izračunat je u primjeru 15.1.1.

a) Jakost magnetskog polja unutar vodiča. Prema (9) navedenog primjera magnetska indukcija unutar vodiča jest:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r, \quad 0 \leq r \leq R$$

Prema (1) jakost magnetskog polja jest:

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r, \quad 0 \leq r \leq R \quad (2)$$

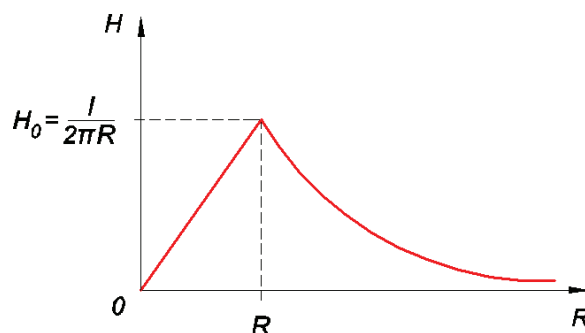
b) Jakost magnetskog polja izvan vodiča. Prema (11) navedenog primjera magnetska indukcija van vodiča jest:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad R \leq r \leq \infty$$

Prema (1) jakost magnetskog polja jest:

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad R \leq r \leq \infty \quad (3)$$

Grafički prikaz promjene jakosti magnetskog polja prikazan je na sl. 2.



Sl. 2. Raspodjela jakosti magnetskog polja

Maksimalna jakost magnetskog polja je na plaštu vodiča:

$$H_0 = \frac{I}{2\pi R} \quad (4)$$

Kao i kod proračuna magnetske indukcije tako i kod ovog proračuna za sve točke prostora, $r \geq R$, uzima se da je struja koncentrirana u osi vodiča.



18.2. Uvjeti na granici

Tangencijalna komponenta vektora jakosti magnetskog polja \vec{H} na graničnoj plohi dviju sredina različitih relativnih permeabilnosti mijenja se skokovito, a skok je jednak iznosu linijske gustoće struje ξ , prema:

$$H_{1t} - H_{2t} = K \quad (18.2.1)$$

Ako nema linijske gustoće struje (strujni oblog), nema ni skoka tangencijalne komponente jakosti magnetskog polja:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (18.2.2)$$

Normalna komponenta vektora magnetske indukcije \vec{B} na graničnoj plohi dviju sredina različitih relativnih permeabilnosti prolazi kontinuirano:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (18.2.3)$$

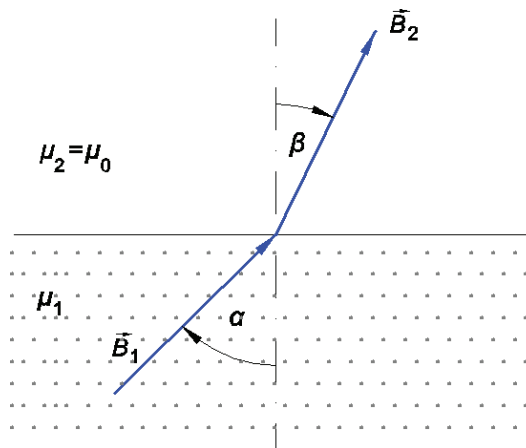
Zakon loma definira se kao kvocijent tangensa ulaznog i tangensa izlaznog kuta u odnosu na normalu na graničnu plohu:

$$\xi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (18.2.4)$$

Primjer 18.2.1.

Vektor magnetske indukcije \vec{B} iz feromagnetika (sredina 1) upada pod kutem α na graničnu plohu feromagnetik - zrak. Za različite vrijednosti upadnog kuta odredite izlazni kut vektora magnetske indukcije \vec{B} .
Podatci: $\mu_r = 5000$ (permendur), $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

Rješenje



Sl. 1. Vektori \vec{B}_1 i \vec{B}_2 s normalom na razdvojnoj plohi zatvaraju ulazni/izlazni kut.

Jednadžba (18.2.4) daje odnos ulaznog i izlaznog kuta:

$$\xi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (1)$$

Budući da je:

$$\mu_1 = \mu_0 \mu_{1r}$$

i

$$\mu_2 = \mu_0$$

dobije se:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \mu_{1r} \quad (2)$$

Iz (2) dobije se:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu_{1r}} \quad (3)$$

za:

$$\alpha = 0^\circ \quad , \quad \beta = 0^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ \quad , \quad \beta = 0,00661^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad , \quad \beta = 0,0198^\circ$$

$$\alpha = 80^\circ \quad , \quad \beta = 0,065^\circ$$

Zaključak:

- a) s porastom upadnog kuta raste i izlazni kut
- b) u proračunima magnetskog kruga može se uzeti, s dovoljno točnosti, da vektor magnetske indukcije iz feromagnetika izlazi s 0° , odnosno okomit je na razdjelnu plohu feromagnetik-zrak.

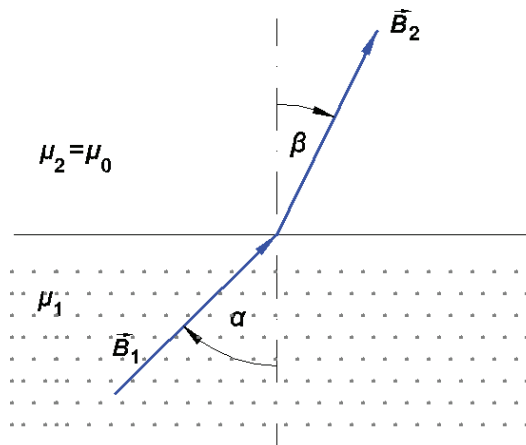


Primjer 18.2.2.

Vektor magnetske indukcije \vec{B} iz feromagnetika (sredina 1) upada pod kutem α na graničnu plohu feromagnetik - zrak. Za različite vrijednosti relativne magnetske permeabilnosti odredite izlazni kut vektora magnetske indukcije \vec{B} .

Podatci: $\alpha = 60^\circ$, $\mu_r = 1000$ (lijevano željezo), $\mu_r = 8300$ (silikonsko željezo), $\mu_r = 7200$ (permalloy).

Rješenje



Sl. 1. Vektori \vec{B}_1 i \vec{B}_2 s normalom na razdvojnoj plohi zatvaraju ulazni/ izlazni kut.

Izlazni kut, prema (3) primjera (18.2.1), jest:

$$\beta = \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu_{1r}} \quad (1)$$

Za različite vrijednosti relativne permeabilnosti dobije se:

lijevano željezo $\beta = 0,0992^\circ$

silikonsko željezo $\beta = 0,01195^\circ$

permalloy $\beta = 0,0138^\circ$

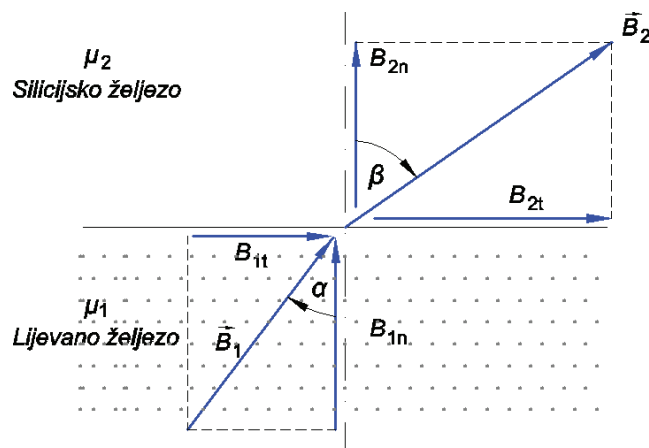
Zaključak:

- s povećanjem relativne permeabilnosti pri istom ulaznom kutu izlazni kut se smanjuje,
- u proračunima magnetskog kruga može se uzeti, s dovoljno točnosti, da vektor magnetske indukcije iz feromagnetika izlazi s 0° , odnosno okomit je na razdjelnu plohu feromagnetik-zrak.



Primjer 18.2.3.

Vektor magnetske indukcije \vec{B} iz sredine 1, lijevano željezo, upada pod kutom α na graničnu ravninu lijevano željezo - silicijsko željezo. Odredite vektor magnetske indukcije po iznosu i smjeru u sredini 2, silicijsko željezo. Podatci: $\alpha = 40^\circ$, $B = 0,5\text{ T}$, $\mu_r = 500$ (lijevano željezo), $\mu_r = 1800$ (silicijsko željezo).

Rješenje

Sl. 1. Vektor \vec{B}_1 upada pod kutom α na razdjelnu ravninu

Prema (18.2.3) normalna komponenta vektora magnetske indukcije \vec{B} prolazi iz jedne u drugu sredinu kontinuirano:

$$B_{2n} = B_{1n} = B_1 \cos \alpha \quad (= 0,383\text{ T}) \quad (1)$$

Izlazni kut β , prema (18.2.4), jest:

$$\beta = \arctg\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \tg \alpha\right) \quad (= 71,683^\circ) \quad (2)$$

Iz slike (1) vidljivo je:

$$B_{2t} = \tg \beta B_{2n} \quad (= 1,1569\text{ T}) \quad (3)$$

Iznos vektora indukcije u sredini 2 jest:

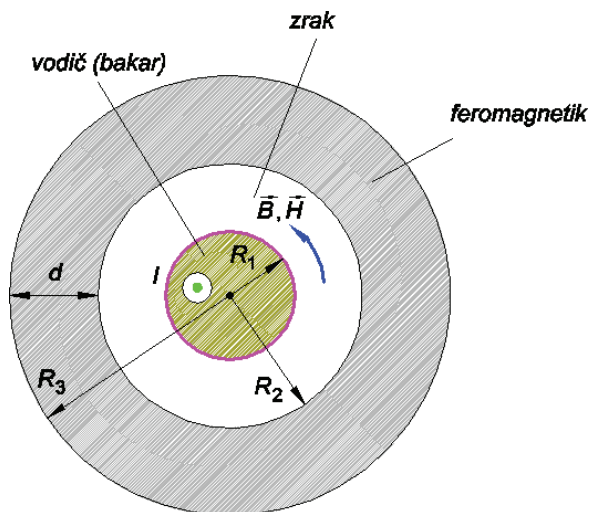
$$B_2 = 1,2186\text{ T}$$



Primjer 18.2.4.

Ravnim, beskonačno dugim bakrenim vodičem radijusa R_1 teče struja konstantne jakosti I . Oko vodiča koaksijalno je postavljen šuplji feromagnetski cilindar debljine d , slika 1. Analitički i grafički prikažite promjenu magnetskog polja i indukcije u funkciji radijusa r .

Podatci: $R_1 = 1,5 \text{ cm}$, $R_2 = 2 \text{ cm}$, $R_3 = 3 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $I = 70 \text{ A}$, $\mu_r = 1600$.

Rješenje

Sl. 1. Cilindrična feromagnetska cijev koaksijalno je postavljena oko cilindričnog bakrenog vodiča

a) Jakost magnetskog polja:

za $0 \leq r \leq R_1$: prema (2) primjera 18.1.8, jakost magnetskog polja jest:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \quad (1)$$

Jakost polja na plaštu vodiča, za $r = R_1$ jest:

$$H_{10} = \frac{I}{2\pi R_1} \quad (742,72 \text{ A/m}) \quad (2)$$

za $R_1 \leq r \leq R_2$: prema (3) primjera 18.1.8, jakost magnetskog polja van vodiča opada s prvom potencijom:

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

Jakost polja na granici zrak - feromagnetik jest:

$$H_{20} = \frac{I}{2\pi R_2} \quad (= 557,04 \text{ A/m}) \quad (4)$$

za $R_2 \leq r \leq R_3$: prema **(18.2.2)** tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja iz jedne sredine prelazi u drugu sredinu kontinuirano (ako na razdjelnoj plohi nema linijske gustoće struje):

$$H_{1R_2} = H_{2R_2} \quad (= 557,04 \text{ A/m}) \quad (5)$$

Slijedi, jakost magnetskog polja u željezu opada, prema (3), s prvom potencijom udaljenosti:

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r} \quad (6)$$

Jakost polja na granici feromagnetik - zrak jest:

$$H_{30} = \frac{I}{2\pi R_3} \quad (= 371,36 \text{ A/m}) \quad (7)$$

za $R_3 \leq r \leq +\infty$: na granici feromagnetik-zrak jakosti magnetskog polja prolazi kontinuirano. Slijedi, jakost magnetskog polja opada s prvom potencijom udaljenosti:

$$H_4 = \frac{I}{2\pi r} \quad (8)$$

b) Magnetska indukcija. Budući da su relativne permeabilnosti zraka i bakra međusobno jednake i jednake jedinici, slijedi da je magnetska indukcija proporcionalna jakosti magnetskog polja.

za $0 \leq r \leq R_1$:

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi R_1^2} r \quad (9)$$

Indukcija na plaštu vodiča, za $r = R_1$, jest:

$$B_{10} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R_1} \quad (= 0,93 \text{ mT}) \quad (10)$$

za $R_1 \leq r \leq R_2$: Magnetska indukcija u međuprostoru vodič - feromagnetik proporcionalna je jakosti magnetskog polja:

$$B_2 = \mu_0 H_2 = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad (11)$$

Na granici zrak-feromagnetik, u zraku, magnetska indukcija iznosi (za $r = R_2$):

$$B_{20} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R_2} \quad (= 0,699 \text{ mT}) \quad (12)$$

za $R_2 \leq r \leq R_3$: Na granici zrak - feromagnetik postoje samo tangencijalne komponente jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije. Tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja, prema **(18.2.2)**, prolazi kontinuirano:

$$H_{2t} = H_{3t} \quad (13)$$

Iz (13) slijedi tangencijalna komponenta indukcije:

$$\frac{B_{2t}}{\mu_0} = \frac{B_{3t}}{\mu_0 \mu_r} \quad (14)$$

Iz (14) dobije se:

$$B_{3t} = \mu_r B_{2t} \quad (15)$$

Budući da je za $B_{2t} = B_2$ i $B_{3t} = B_3$, uvrštavanjem (11) u (15) dobije se:

$$B_3 = \mu_r B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad (16)$$

Na granici zrak-feromagnetik, u feromagnetiku, magnetska indukcija za $r = R_2$ iznosi:

$$B_{32} = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi R_2} \quad (= 1,118\text{T}) \quad (17)$$

Na granici feromagnetik-zrak, u feromagnetiku, magnetska indukcija za $r = R_3$ iznosi:

$$B_{34} = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi R_3} \quad (= 0,745\text{T}) \quad (18)$$

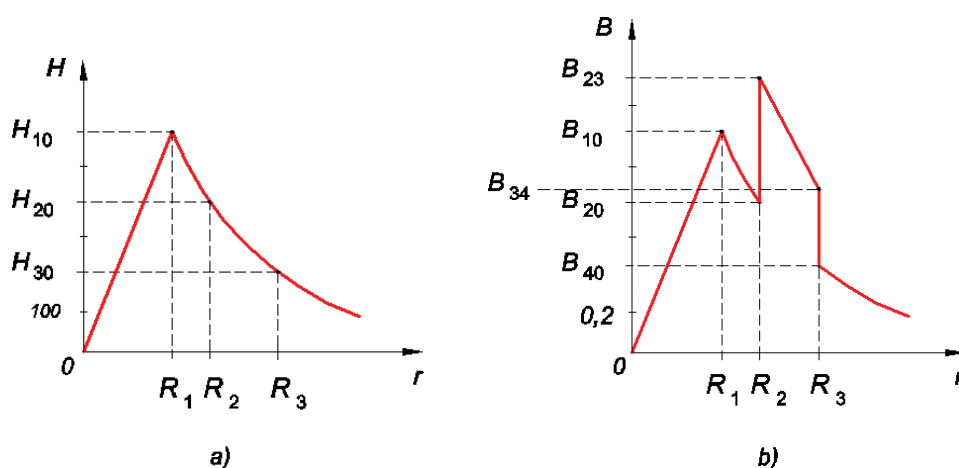
za $R_3 \leq r \leq +\infty$: Van feromagnetika, u zraku, magnetska indukcija proporcionalna je jakosti magnetskog polja:

$$B_4 = \mu_0 H_4 = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad (19)$$

Na granici feromagnetik-zrak, u zraku, magnetska indukcija za $r = R_3$ iznosi:

$$B_{40} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_3} \quad (= 0,466\text{mT}) \quad (20)$$

Na slici 2 grafički je prikazana promjena jakosti magnetskog polja i indukcije u funkciji udaljenosti od osi vodiča.



Sl. 2. Promjena jakosti magnetskog polja a) i indukcije b) u funkciji radijusa (udaljenost od osi vodiča)

$$H_{10} = 742 \text{ A/m} \quad B_{10} = 0,93 \text{ mT}$$

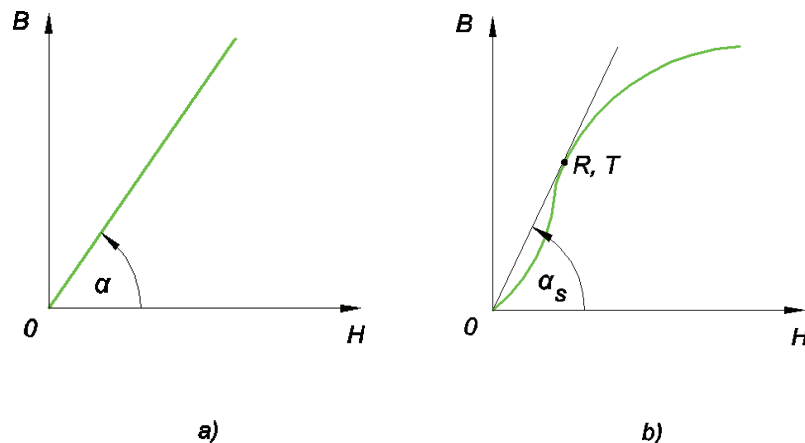
$$H_{20} = 557 \text{ A/m} \quad B_{20} = 0,669 \text{ mT} \quad B_{24} = 1,118 \text{ T}$$

$$H_{30} = 371 \text{ A/m} \quad B_{34} = 0,745 \text{ T} \quad B_{40} = 0,46 \text{ mT}$$



18.3. Krivulja magnetiziranja

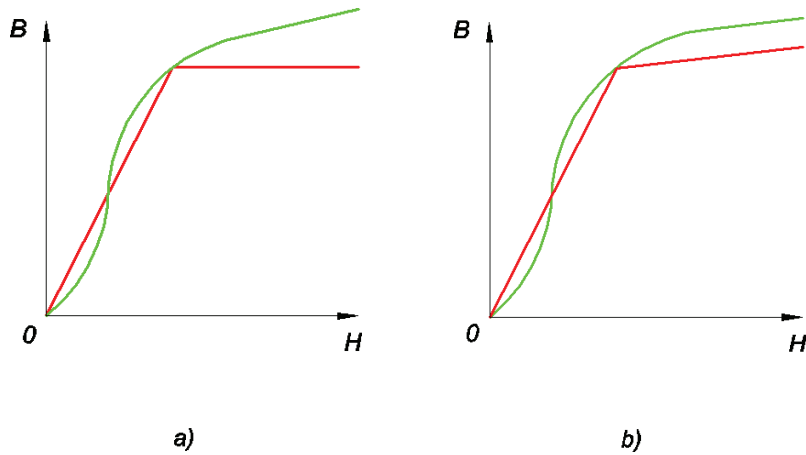
Pod pojmom krivulje magnetiziranja, iz B - H karakteristike, podrazumijeva se rast magnetske indukcije B potpuno razmagnetiziranog feromagnetika pri povećanju jakosti magnetskog polja H od nule naviše. B - H karakteristika u principu jest: linearna ili nelinearna, slika 1a i 1b.



Sl. 1. Linearna a) i nelinearna krivulja magnetiziranja b)

Vrlo često, jednostavnosti radi, umjesto nelinearne B - H karakteristike koristi se linearizirana karakteristika. Ova karakteristika dobije se na način da se u radnoj točki, R.T., povuče pravac kroz radnu točku i ishodište.

Također, jednostavnosti proračuna radi, vrlo se često nelinearna krivulja idealizira, zamjenjuje pravcima, slika 2a i 2b.



Sl. 2. Način idealiziranja nelinearne krivulje magnetiziranja a) i b)

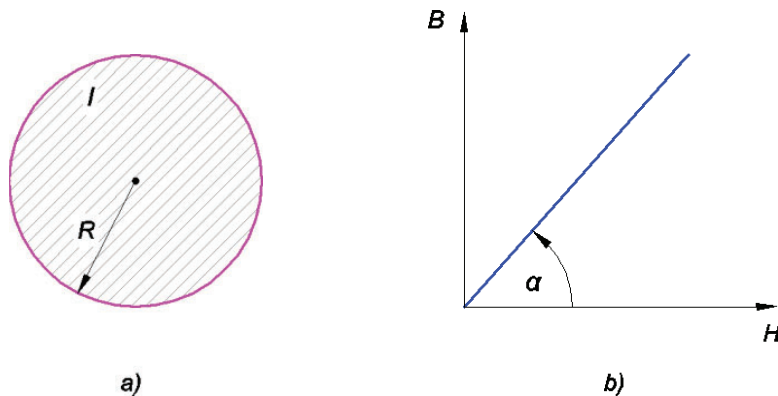
Primjer 18.3.1.

Ravni, beskonačno dugi vodič kružnog presjeka načinjen je od feromagnetika s linearnom B-H karakteristikom. Vodičem teče struja jakosti I . Odredite:

- permeabilnost, $\mu = \mu(H)$
- jakost magnetskog polja, $H = H(r)$
- indukciju, $B = B(r)$
- vektor magnetiziranja, $M = M(r)$.

Dobijene rezultate prikažite grafički.

Podatci: $R = 0,8\text{ cm}$, $\alpha = 1,2^\circ$, $I = 1,25\text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Presjek feromagnetskog vodiča a) i B-H karakteristika b)

Za $0 \leq r \leq R$

- Permeabilnost μ određena je kvocijentom B i H , i iznosi:

$$\mu = \frac{B}{H} = \operatorname{tg} \alpha \quad (= 20,94 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}) \quad (1)$$

Za linearnu B - H karakteristiku permeabilnost je konstantnog iznosa.

b) Jakost magnetskog polja određuje se primjenom Općeg oblika Ampereova zakona. Prema (2) primjera 18.1.8 jakost magnetskog polja unutar feromagnetika jest:

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (2)$$

Iznosi magnetskog polja za:

$$r = 0 \quad H = 0$$

$$r = R \quad H_{\text{fR}} = 24,86 \text{ A/m}$$

c) Indukcija B proporcionalna je jakosti magnetskog polja:

$$B = \mu H \quad (3)$$

Magnetska indukcija za:

$$r = 0 \quad B = 0$$

$$r = R \quad B_{\text{fR}} = 0,52 \text{ T}$$

d) Vektor magnetiziranja, prema (18.1.8), jest:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (4)$$

Uvrštavanjem (3) u (4) dobije se:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} \quad (5)$$

Budući da je $\mu \gg \mu_0$, jednačba (5) postaje:

$$\vec{M} \cong \frac{\mu}{\mu_0} \vec{H} \quad (6)$$

Vektor magnetiziranja za:

$$r = 0 \quad M = 0$$

$$r = R \quad M_{\text{fR}} = 414,25 \text{ kA/m}$$

Za $R \leq r \leq +\infty$

a) Permeabilnost μ jednaka je permeabilnosti zraka:

$$\mu = \mu_0 \quad (7)$$

b) Jakost magnetskog polja u zraku (van vodiča), prema (3) primjera 18.1.8, jest:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (8)$$

Magnetsko polje za:

$$r = R \quad H_{\text{0R}} = H_{\text{fR}} = 24,86 \text{ A/m}$$

$$r \rightarrow \infty \quad H_0 = 0$$

c) Magnetska indukcija u zraku, prema (3) i (7), jest:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (= 31,24 \mu\text{T}) \quad (9)$$

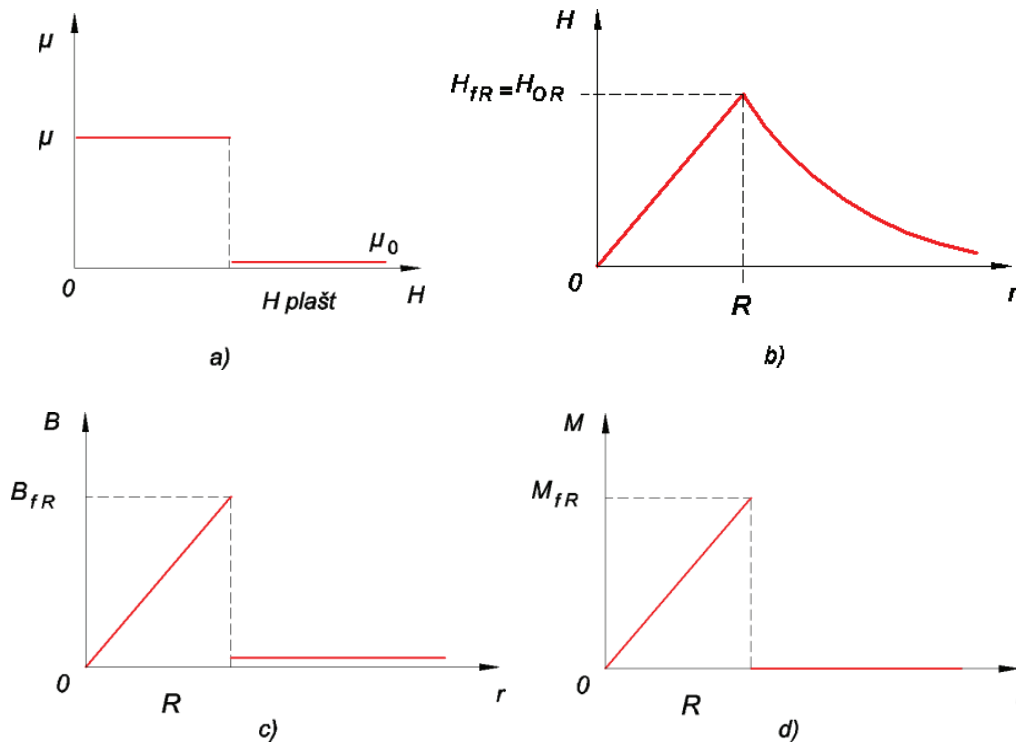
Magnetska indukcija za:

$$r = R \quad B_{\text{0R}} = 31,24 \mu\text{T}$$

$$r \rightarrow \infty \quad B_0 = 0$$

d) Vektor magnetiziranja u zraku, prema (5), za $\mu = \mu_0$ jest:

$$M = 0 \quad (10)$$



Sl. 2. Grafički prikaz rezultata: permeabilnosti μ a), jakosti polja H b), indukcije B c), i vektora magnetiziranja M d)



Primjer 18.3.2.

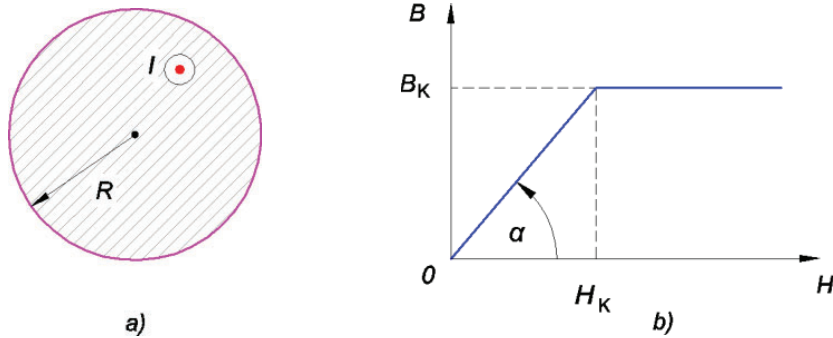
Ravni, beskonačno dugi vodič kružnog presjeka načinjen je od feromagnetika s nelinearnom B - H karakteristikom. Vodičem teče struja jakosti I . Odredite:

- permeabilnost, $\mu = \mu(H)$
- jakost magnetskog polja, $H = H(r)$
- indukciju, $B = B(r)$
- vektor magnetiziranja, $M = M(r)$.

Dobijene rezultate prikažite grafički.

Podatci: $R = 0,8 \text{ cm}$, $\alpha = 1,2^\circ$, $I = 1,25 \text{ A}$, $H_K = 18 \text{ A/m}$.

Rješenje

Sl. 1. Presjek feromagnetskog vodiča a) i idealizirana B - H karakteristika b)

Budući da se zadatkom traži $B(r)$, nužno je odrediti za koji iznos radijusa jakost polja jest H_K . Iz (2) primjera (18.1.8) dobije se:

$$r_K = \frac{2\pi R^2 H_K}{I} \quad (= 0,58 \text{ cm}) \quad (1)$$

Za $0 \leq r \leq R$

a) Permeabilnost μ određena je kvocijentom B i H i iznosi:

za: $0 \leq H \leq H_K$

$$\mu = \frac{B}{H} = \text{tg } \alpha \quad (= 20,94 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}) \quad (2)$$

za: $H_K \leq H \leq H(R)$ za sve iznose jakosti polja $H \geq H_K$ magnetska indukcija je nepromijenjena (konstantna) i jednaka B_K .

Uvrštavanjem u (2) za $B=B_K$ i za jakost magnetskog polja (2) iz primjera 18.1.8 dobije se:

$$\mu = \frac{2\pi R^2 B_K}{I} \frac{1}{r} \quad (3)$$

gdje je:

$$B_K = \mu H_K = \text{tg } \alpha H_K \quad (= 0,3775 \text{ T}) \quad (4)$$

indukcija u koljenu idealizirane B - H karakteristike.

Iznos permeabilnosti na granici feromagnetik-zrak u feromagnetiku, prema (2), jest: $\mu_{fR} = 15,16 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}$. Iz (2) vidljivo je da za sve vrijednosti $H > H_K$ permeabilnost opada s prvom potencijom udaljenosti od osi vodiča.

b) Jakost magnetskog polja, v. primjer 18.1.8, jest:

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (5)$$

Na granici feromagnetik - zrak, v. primjer 18.3.1, jest: $H_{fR} = 24,86 \text{ A/m}$.

c) Indukcija B proporcionalna je jakosti magnetskog polja do $H = H_K = 18 \text{ A/m}$. Za $H > H_K$ indukcija je konstantnog iznosa i jednaka B_K .

za:

$$0 \leq r \leq r_K \quad B = \mu H$$

$$r_K \leq r \leq R \quad B = \text{konst.} = B_K$$

d) Vektor magnetiziranja, prema (18.1.8), jest:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (6)$$

za:

$$0 \leq r \leq r_K \quad \vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H} \quad (7a)$$

$$r_K \leq r \leq R \quad \vec{M} = \frac{\vec{B}_K}{\mu_0} - \vec{H} \quad (7b)$$

Na radijusu r_K iznos vektora magnetiziranja jest: $M_K = 299,989 \text{ kA/m}$, a na plaštu $M_{fR} = 299,982 \text{ kA/m}$.

Za $R \leq r \leq +\infty$

a) Permeabilnost je jednaka permeabilnosti zraka, $\mu = \mu_0$.

b) Jakost magnetskog polja, prema (3) primjera 18.1.8, opada s prvom potencijom:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (8)$$

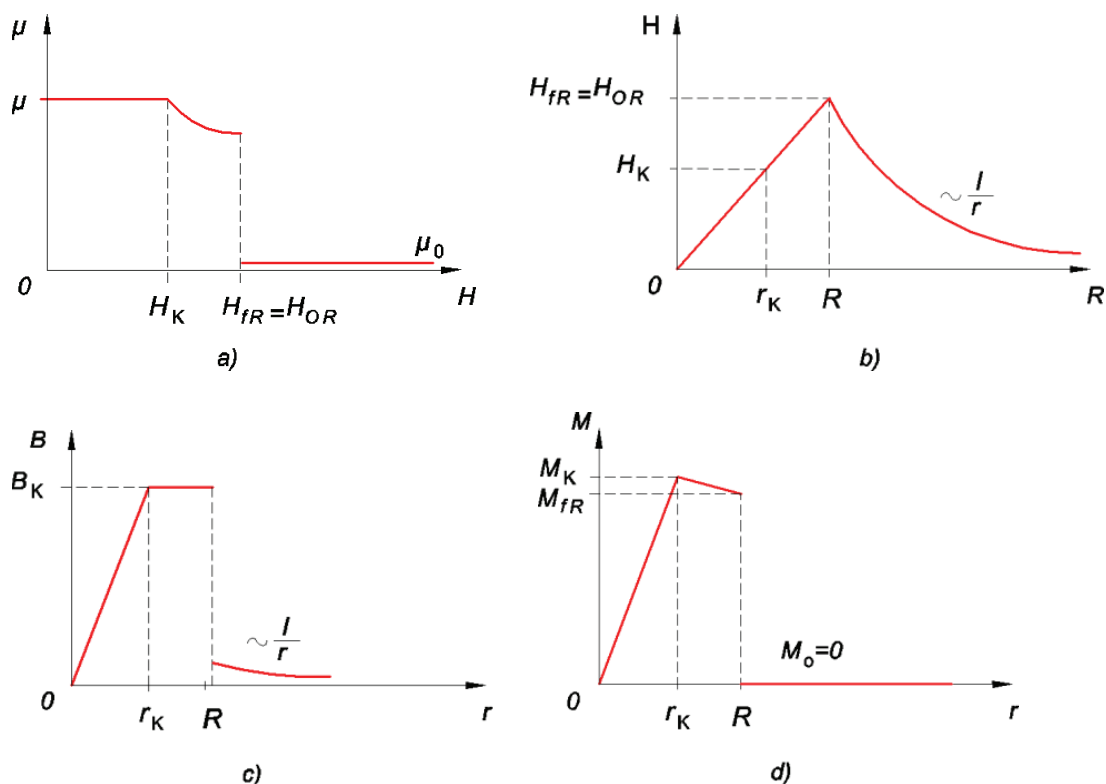
Na granici feromagnetik-zrak, u zraku, jakost polja ista je kao u feromagnetiku: $H_{0R} = 24,86 \text{ A/m}$.

c) Magnetska indukcija, u zraku, proporcionalna je jakosti magnetskog polja:

$$B = \mu_0 H \quad (9)$$

Na granici feromagnetik-zrak, u zraku, iznosi: $B_{0\text{plast}} = 31,24 \mu\text{T}$.

d) Vektor magnetiziranja u zraku jednak je nuli.



Sl. 2. Grafički prikaz rezultata: permeabilnosti μ a), jakosti polja H b), indukcije B c) i vektora magnetiziranja M d)



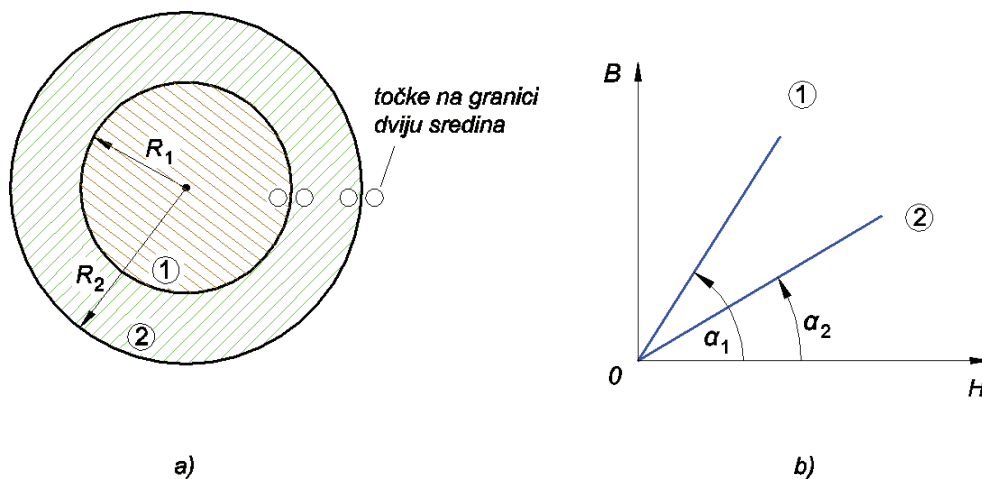
Primjer 18.3.3.

Ravni, beskonačno dugi vodič kružnog presjeka načinjen je kao dvoslojni. Slojevi vodiča su feromagnetici s linearnim B - H karakteristikama. Vodičem teče struja jakosti I . Odredite:

- jakost magnetskog polja, $H = H(r)$
- indukciju, $B = B(r)$
- vektor magnetiziranja, $M = M(r)$.

Dobijene rezultate prikažite grafički.

Podatci: $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 1,5 \text{ cm}$, $\alpha_1 = 1,145^\circ$, $\alpha_2 = 0,38^\circ$, $\kappa_1 = \kappa_2$ (električna provodnost), $I = 6,5 \text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Presjek dvoslojnog ravnog vodiča a) i B - H karakteristika b)

Budući da su električne provodnosti κ_1 i κ_2 međusobno jednake, gustoća struje po presjeku vodiča konstantnog je iznosa.

Za $0 \leq r \leq R_2$

a) Jakost magnetskog polja u vodiču, prema (2) primjera 18.1.8, jest:

$$H = \frac{I}{2\pi R_2^2} r \quad (1)$$

Iznosi magnetskog polja za pojedine radijuse jesu:

$$r = 0 \quad H_{10} = 0$$

$$r = R_1 \quad H_{11} = H_{21} = 45,97 \text{ A/m}$$

$$r = R_2 \quad H_{22} = 68,96 \text{ A/m}$$

Napomena: Oznaka H_{11} jest jakost polja u sredini 1 i na radijusu R_1 .

b) Indukcija B proporcionalna je jakosti magnetskog polja u svakom od slojeva (posljedica linearne B - H karakteristike).

$$B = \mu H \quad (2)$$

za:

$$0 \leq r \leq R_1 \quad B_1 = \mu_1 H \quad (3a)$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \quad B_2 = \mu_2 H \quad (3b)$$

gdje je:

$$\mu_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad , \quad \mu_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$$

permeabilnosti prvog odnosno drugog sloja.

Iznosi magnetske indukcije za pojedine radijuse jesu:

$$r = 0 \quad B_1 = 0$$

$$r = R_1 \quad B_{11} = 0,918 \text{ T} \quad , \quad B_{21} = 0,305 \text{ T}$$

$$r = R_2 \quad B_{22} = 0,457 \text{ T}$$

c) Vektor magnetiziranja, prema (18.1.8), jest:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (4)$$

Budući da je permeabilnost svakog sloja mnogo veća od permeabilnosti zraka, jednadžba (4) uz (2) može se pisati u obliku:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} \cong \frac{\mu}{\mu_0} \vec{H} \quad (5)$$

Iznosi vektora magnetiziranja za pojedine radijuse jesu:
Vektor magnetiziranja za:

$$r = 0 \quad M_1 = 0$$

$$r = R_1 \quad M_{11} = 731 \text{ kA/m} \quad , \quad M_{21} = 242,6 \text{ kA/m}$$

$$r = R_2 \quad M_{22} = 363,9 \text{ kA/m}$$

Za $R_2 \leq r \leq +\infty$

a) Jakost magnetskog polja u zraku, prema (3) primjera 18.1.8, jest:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (6)$$

Iznosi jakosti polja za pojedine radijuse jesu:

$$r = R_2 \quad H_{20} = H_{22} = 68,96 \text{ A/m}$$

$$r \rightarrow +\infty \quad H = 0$$

b) Magnetska indukcija u zraku proporcionalna je jakosti magnetskog polja:

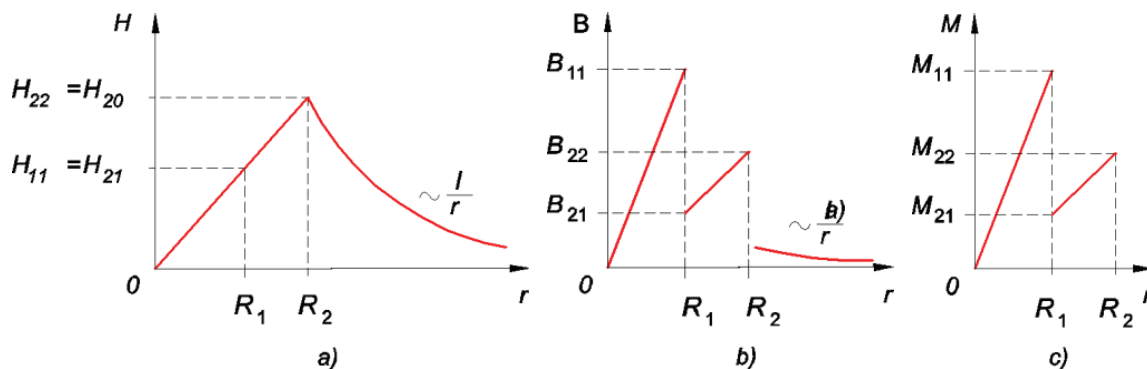
$$B = \mu_0 H \quad (7)$$

Iznosi magnetske indukcije za pojedine radijuse jesu:

$$r = R_2 \quad B_{20} = 86 \mu\text{T}$$

$$r \rightarrow +\infty \quad B_0 = 0$$

c) Vektor magnetiziranja u zraku jednak je nuli.



Sl. 2. Grafički prikaz rezultata jakosti polja H a), indukcije B b) i vektora magnetiziranja M c)



Primjer 18.3.4.

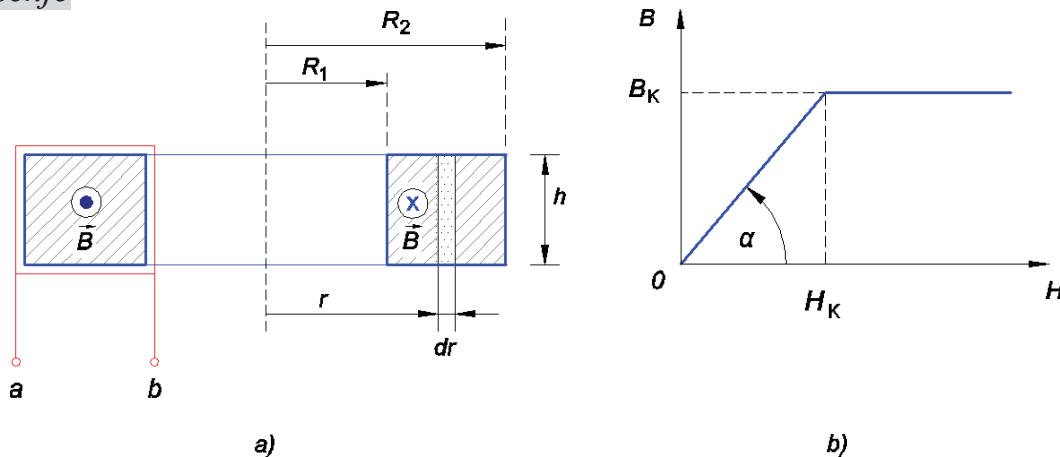
Torusna jezgra pravokutnog presjeka načinjena je od feromagnetskog materijala s nelinearnom $B-H$ karakteristikom. Na torusnu jezgru namotano je N zavoja kojima teče struja jakosti I . Odredite:

- a) permeabilnost, $\mu = \mu(H)$
- b) jakost magnetskog polja, $H = H(r)$
- c) indukciju, $B = B(r)$
- d) vektor magnetiziranja, $M = M(r)$.

Dobijene rezultate prikažite grafički.

Podatci: $R_1 = 4,5 \text{ cm}$, $R_2 = 6 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $\alpha = 0,9^\circ$, $I = 0,1 \text{ A}$, $H_K = 38 \text{ A/m}$, $N = 120$ zavoja .

Rješenje



Sl.1. Presjek torusne jezgre a) i idealizirana $B-H$ karakteristika b)

Budući da se zadatkom traži $B(r)$, nužno je odrediti za koji iznos radijusa jakost polja jest H_K . Iz (2) primjera (18.1.8) dobije se:

$$r_K = \frac{2\pi R^2 H_K}{I} \quad (= 5 \text{ cm}) \quad (1)$$

Za $0 \leq r \leq R_1$

a,b) Permeabilnost prvog dijela idealizirane B - H karakteristike $[0, H_K]$ konstantnog je iznosa:

$$\mu = \frac{B_K}{H_K} = \text{tg } \alpha \quad (= 15,7 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}) \quad (2)$$

U drugom dijelu B - H karakteristike, uz konstantnu indukciju B , permeabilnost je ovisna o raspodjeli magnetskog polja H . Jakost magnetskog polja u torusnoj jezgri, upotrebom Općeg oblika Ampereova zakona, jest:

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (3)$$

Magnetska indukcija i jakost polja stoje u čvrstoj vezi:

$$B = \mu H \quad (4)$$

Budući da, prema (3), jakost polja pada s prvom potencijom, permeabilnost mora rasti s prvom potencijom kako bi indukcija ostala konstantna za sve jakosti polja $H \geq H_K$.

$$\mu = \frac{2\pi B_K r}{NI} \quad (5)$$

Permeabilnost na pojedinim radijusima jest:

$$r = R_1 \quad \mu_1 = 14,07 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}$$

$$r_K \leq r \leq R_2 \quad \mu_R = 15,7 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}$$

Jakost magnetskog polja na pojedinim radijusima, prema (3), jest:

$$r = R_1 \quad H_1 = 42,44 \text{ A/m}$$

$$r = R_2 \quad H_2 = 31,83 \text{ A/m}$$

c) Indukcija B , prema (4), proporcionalna je jakosti polja za sve iznose polja $H_2 \leq H \leq H_K$. Za sva polja $H_K \leq H \leq H_1$ magnetska je indukcija konstantna. Magnetska indukcija na pojedinim radijusima jest:

$$R_1 \leq r \leq r_K \quad B_1 = \mu_1 H_K = 0,596 \text{ T}$$

$$r = R_2 \quad B_2 = \mu_R H_2 = 0,499 \text{ T}$$

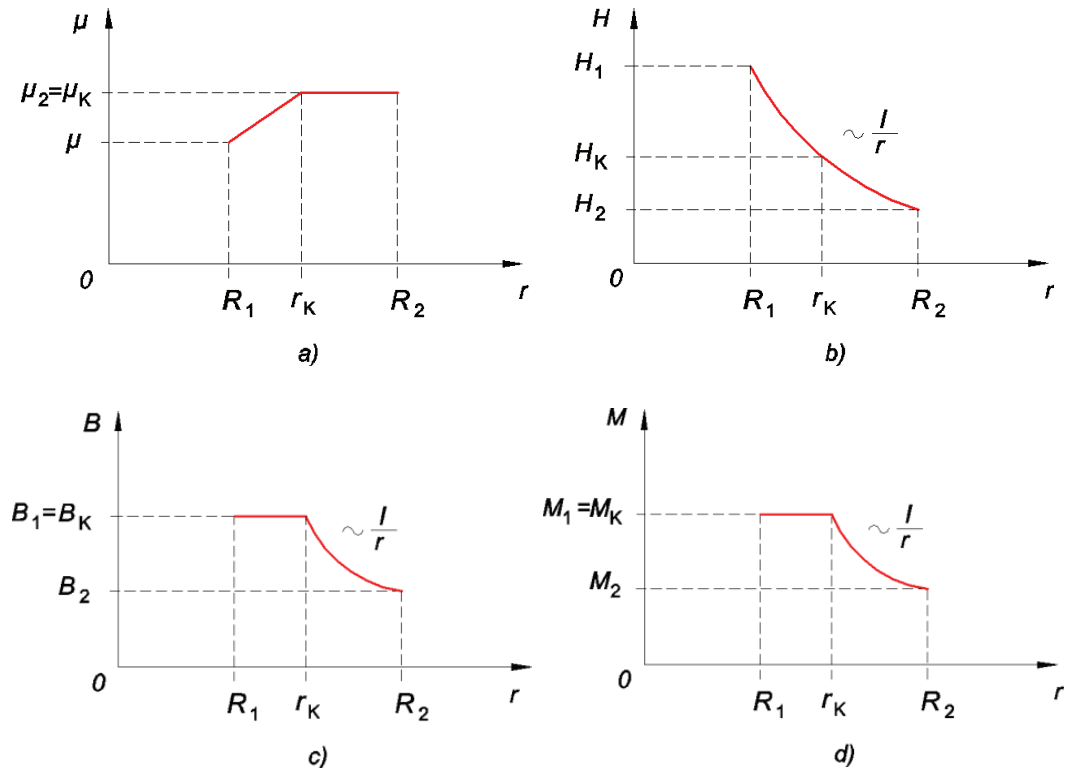
d) Vektor magnetiziranja, prema (5) primjera (18.3.3), jest:

$$\vec{M} \cong \frac{\mu}{\mu_0} \vec{H} \quad (6)$$

Na pojedinim radijusima vektor magnetiziranja iznosi:

$$R_1 \leq r \leq r_K \quad M_1 = M_K = \frac{B_K}{\mu_0} = 474,28 \text{ kA/m}$$

$$r = R_2 \quad M_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_K}{H_K} H_2 = 397,67 \text{ kA/m}$$



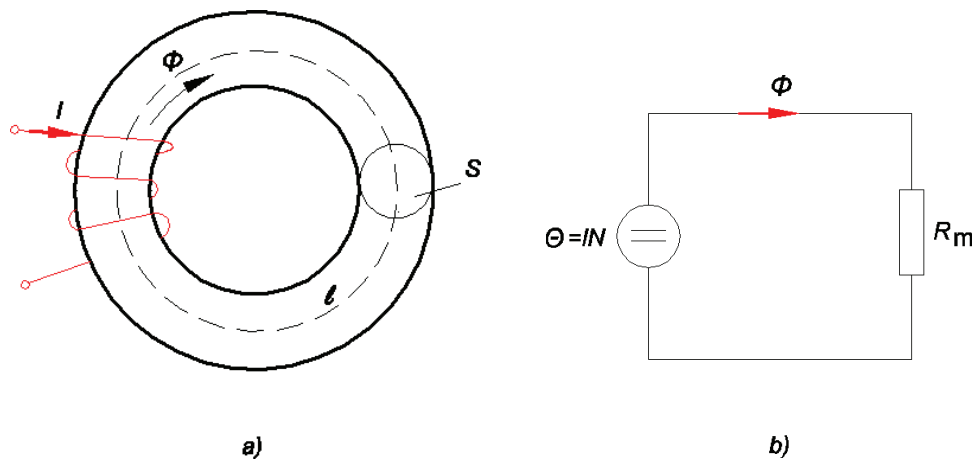
Sl. 2. Grafički prikaz rezultata: permeabilnosti μ a), jakosti polja H b), indukcije B c) i vektora magnetiziranja M d)



19. PRORAČUN MAGNETSKOG KRUGA

Osnovni zakoni za proračun magnetskog kruga

19.1. Ohmov zakon za magnetski krug. Ako je na magnetsku jezgru, slika 19.1, namotano N zavoja kojima teče struja jakosti I ,



Sl. 19. 1. Magnetski krug a) i nadomjesna shema b)

tada je magnetski tok u jezgri, prema (26.1),

$$\phi = \frac{\theta}{R_m} \quad (19.1)$$

gdje je:

$$\theta = NI \quad (19.2)$$

magnetomotorna sila (MMS)

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (19.3)$$

magnetski otpor.

Svaki magnetski krug može se prikazati nadomjesnom shemom, slika 19.1b).

19.2. Prvi i drugi Kirchhoffov zakon

U točki grananja zbroj magnetskih tokova jednak je nuli, prema (26.7):

$$a \lg \sum_k \phi_k = 0 \quad (19.4)$$

i predstavlja I. Kirchhoffov zakon za magnetizam.

Primjenom Općeg oblika Ampereova zakona za magnetski krug slijedi:

$$a \lg \sum_i \theta_i = a \lg \sum_k H_k l_k \quad (19.5)$$

gdje je:

H_k jakost magnetskog polja k – te grane

l_k srednja dužina k – te grane.

Magnetski tok k – te grane, prema (26.9a) II. Sveska, jest:

$$\phi_k = B_k S_k = \frac{H_k}{\mu_k} S_k \quad (19.6)$$

gdje je: S_k površina poprečnog presjeka jezgre.

Magnetski otpor k – te grane, prema (26.9b) jest:

$$R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k S_k} \quad (19.7)$$

Uvrštavanjem H_k i l_k iz (19.6) i (19.7) u (19.5) dobije se:

$$a \lg \sum_{ki} \theta_{ki} = a \lg \sum_k \phi_k R_{mk} \quad (19.8)$$

što je II. Kirchhoffov zakon za magnetizam (zbroj MMS u zatvorenoj magnetskoj petlji jednak je zbroju padova magnetskih napona).

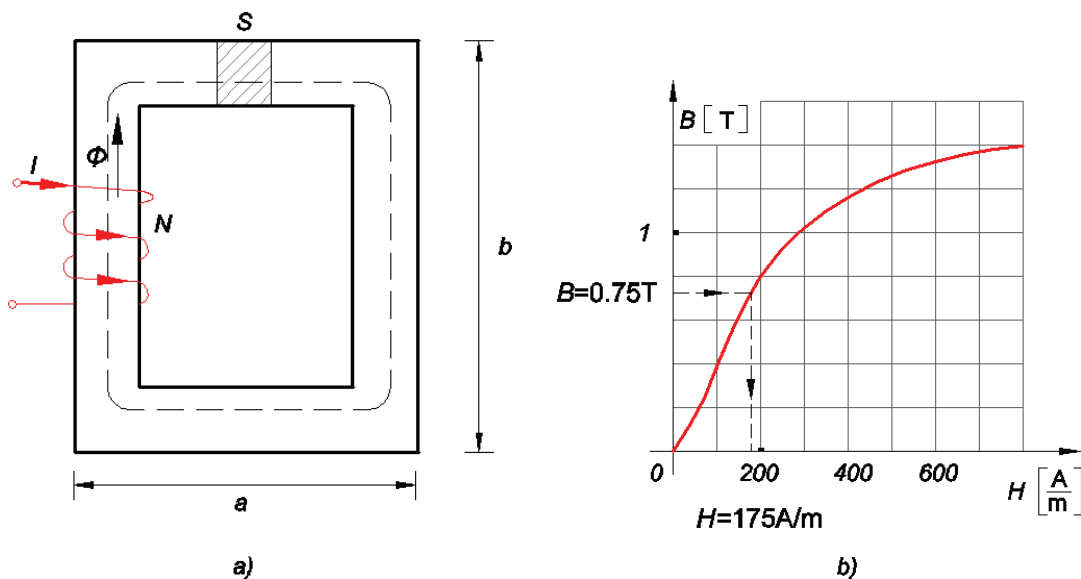
Pri proračunu magnetskih krugova vrlo će se često koristiti zakon očuvanja magnetskog toka (21.13):

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (19.9)$$

Primjer 19.1.

Na feromagnetsku jezgru, poznatih izmjera, slika 1, namotano je N zavoja. Odredite tako struju koja teče zavojima da je tok u jezgri ϕ .

Podatci: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $S = 1 \text{ cm}^2$, $N = 70$, $\phi = 75 \mu\text{Vs}$,
 $B - H$ karakteristika .

Rješenje

Sl. 1. Feromagnetska jezgra a) i $B-H$ karakteristika b)

Primjenom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5), na zadani magnetski krug, dobije se:

$$Hl = NI \quad (1)$$

gdje je:

H - jakost magnetskog polja u jezgri
 l - srednja duljina linija polja (= 16 cm).

Budući da je $B-H$ karakteristika nelinearna, jakost magnetskog polja odredit će se grafo-analitički.

Za zadani magnetski tok ϕ i poznavanjem presjeka S magnetska indukcija jest:

$$B = \frac{\phi}{S} \quad (= 0,75 \text{ T}) \quad (2)$$

Za zadanu indukciju $B = 0,75\text{ T}$, iz B - H karakteristike očita se $H = 175\text{ A/m}$. Iz (1) dobije se:

$$I = \frac{HL}{N} \quad (= 0,4\text{ A})$$

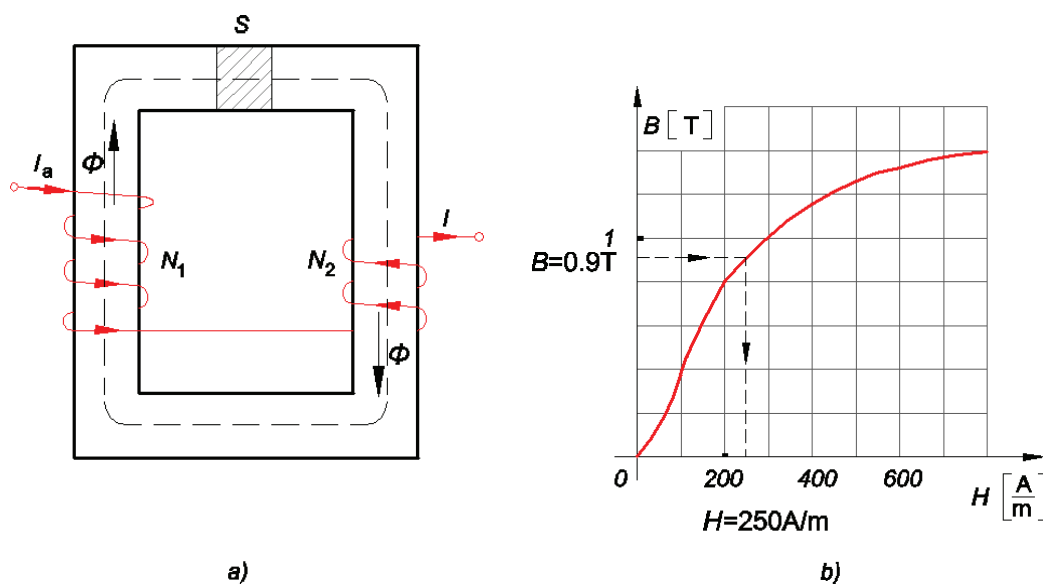


Primjer 19.2.

Na magnetsku jezgru, izmjera i B - H karakteristike kao na primjeru 19.1, namotana su dva svitka sa N_1 odnosno N_2 zavoja. Odredite broj zavoja drugog svitka tako da struja koja teče zavojima stvara u jezgri tok ϕ .

Podatci: $N_1 = 50$, $I = 0,5\text{ A}$, $\phi = 90\mu\text{Vs}$, B - H karakteristika.

Rješenje



Sl. 1. Magnetska jezgra s dva svitka a) i B - H karakteristika b)

Primjenom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5), na zadani magnetski krug, dobije se:

$$(N_1 + N_2)I = HI \quad (1)$$

gdje je:

H - jakost magnetskog polja

l - srednja duljina linija polja (= 16 cm).

Budući da je $B-H$ karakteristika nelinearna, jakost magnetskog polja odredit će se grafo-analitički.

Za zadani magnetski tok indukcija jest:

$$B = \frac{\phi}{S} \quad (= 0,9 \text{ T}) \quad (2)$$

Za zadanu indukciju, $B = 0,9 \text{ T}$, iz $B-H$ karakteristike očita se $H = 250 \text{ A/m}$. Iz (1) slijedi:

$$N_2 = \frac{HL}{I} - N_1 \quad (= 30 \text{ zavoja}) \quad (3)$$

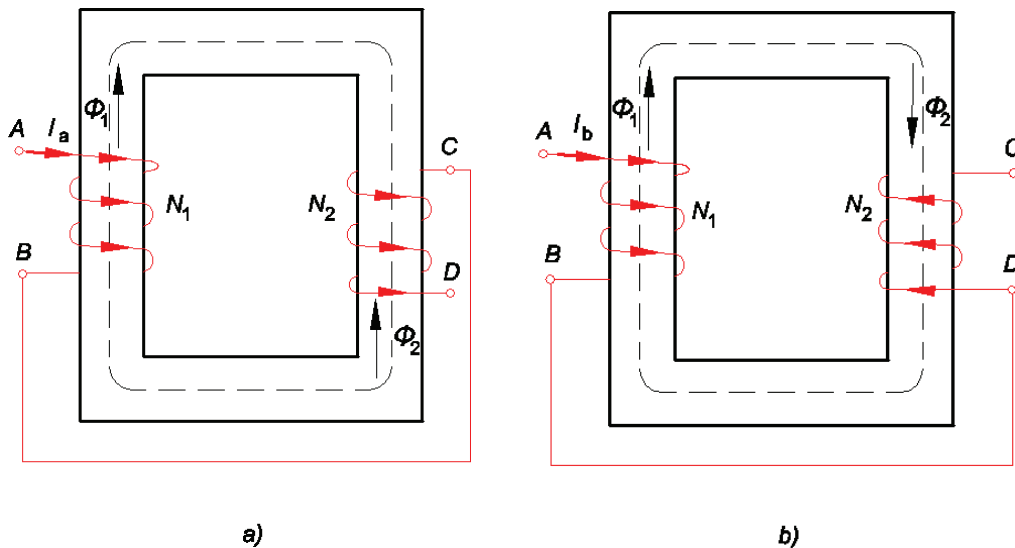


Primjer 19.3.

Na magnetsku jezgru, izmjera i $B-H$ karakteristike kao na primjeru 19.1, namotana su dva svitka, slika 1. Svitci su spojeni tako da im se tokovi jedan put potpomažu, a drugi put djelomično poništavaju. Odredite struje I_1 i I_2 tako da magnetski tok u jezgri ostane, bez obzira na način spajanja svitaka, nepromijenjen.

Podatci: $N_1 = 60$, $N_2 = 40$, $\phi = 0,11 \text{ mVs}$, $S = 1 \text{ cm}^2$, $B-H$ karakteristika.

Rješenje



Sl. 1. Svitci na jezgri spojeni su na dva načina a) magnetski se tokovi djelomično poništavaju, b) potpomažu

Primjenom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5), na zadane magnetske krugove, prema slici 1a) i 1b), dobije se:

Za shemu prema:

$$\text{Sl.1a)} \quad (N_1 - N_2)I_a = Hl \quad (1a)$$

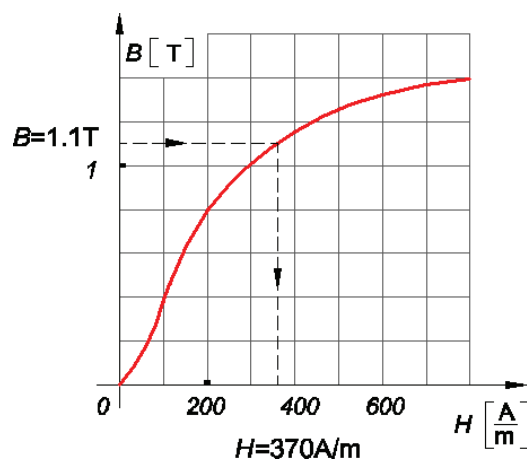
$$\text{Sl.1b)} \quad (N_1 + N_2)I_b = Hl \quad (1b)$$

gdje je:

H - jakost magnetskog polja

l - srednja duljina linija polja (=16 cm).

Budući da je B - H karakteristika nelinearna, prema slici 2, jakost magnetskog polja odredit će se grafo-analitički.



Sl. 2. $B - H$ karakteristika

Za zadani magnetski tok indukcija jest:

$$B = \frac{\phi}{S} \quad (= 1,1 T) \quad (2)$$

Za izračunatu indukciju, $B = 1,1 T$, iz B - H karakteristike očitava se:

$H = 370 A/m$.

Prema 1a i 1b tražene struje jesu:

$$I_a = \frac{Hl}{N_1 - N_2} \quad (= 2,96 A)$$

$$I_b = \frac{Hl}{N_1 + N_2} \quad (= 0,59 A)$$

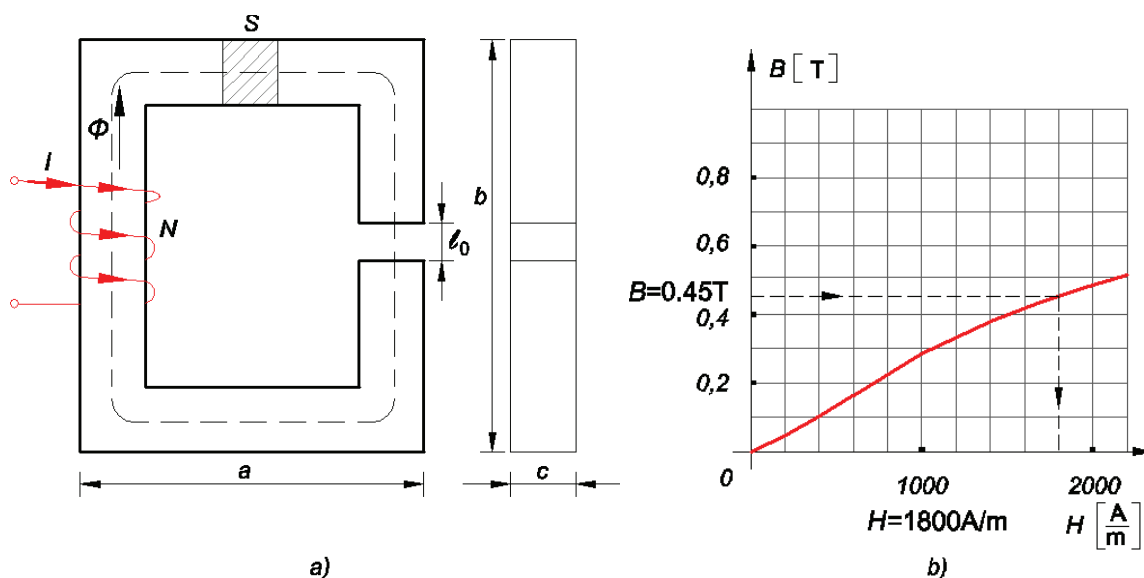


Primjer 19.4.

Na feromagnetsku jezgru sa zračnim rasporedom, poznatih izmjera, slika 1, namotano je N zavoja. Odredite:

- struju koja mora teći zavojima da magnetska indukcija u zračnom rasporu bude B_0
- omjer jakosti magnetskog polja u zraku i feromagnetiku. Zanimarite rasipanje.

Podatci: $B = 0,45\text{ T}$, $a = 7\text{ cm}$, $b = 10\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$, $S = 1 \times 2\text{ cm}^2$,
 $l_0 = 1,5\text{ mm}$, $N = 380$, B - H karakteristika.

Rješenje

Sl. 1. Feromagnetska jezgra a) i B - H karakteristika

a) Upotrebom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5), za zadani magnetski krug dobije se:

$$NI = H_z l_z + H_0 l_0 \quad (1)$$

gdje je:

H_z, H_0 - jakost magnetskog polja u željezu/zraku

l_z, l_0 - srednja duljina linija polja u željezu/zraku.

Srednja duljina linija polja u željezu, prema zadanim izmjerima, jest

$$l_z = 30\text{ cm}.$$

Napomena: Pri izračunu srednje duljine linija polja uzima se da je $l_z - l_0 \cong l_z$.

Uz pretpostavku da nema širenja magnetskih linija u zračnom rasporu, tada je $S_0 = S_z$, pa se iz (3) dobije $B_0 = B_z = 0,45 \text{ T}$.

Za zadanu indukciju u zračnom rasporu jakost magnetskog polja jest:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (= 358,1 \text{ kA/m}) \quad (2)$$

Iz zakona o očuvanju magnetskog toka (19.9) dobije se:

$$\phi_0 = \phi_i \quad (3)$$

ili u obliku:

$$B_0 S_0 = B_z S_z$$

Za $B_z = 0,45 \text{ T}$ iz B - H karakteristike dobije se: $H_z = 1800 \text{ A/m}$.

Prema (1) tražena struja jest:

$$I = \frac{1}{N} (H_z l_z + H_0 l_0) \quad (= 2,83 \text{ A}) \quad (4)$$

b) Omjer jakosti polja jest:

$$\frac{H_0}{H_z} = 198,94$$

Uz iste iznose indukcije u zraku i željezu jakost polja je 198,94 skoro 200 puta veća u zraku nego u željezu.



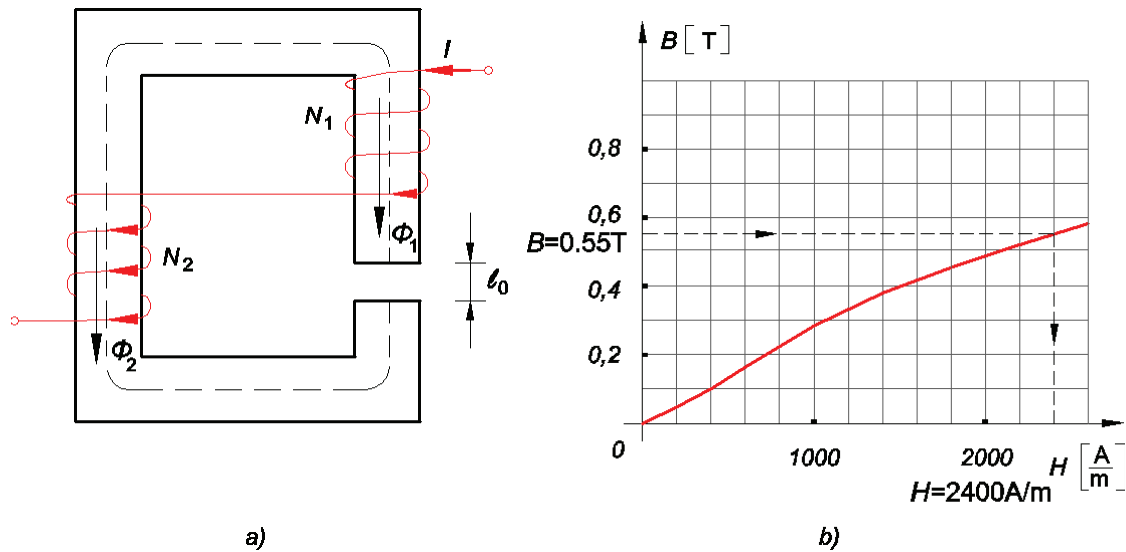
Primjer 19.5.

Na feromagnetsku jezgru sa zračnim rasporom, poznatih izmjera, i B - H karakteristike kao u primjeru 19.4, namotana su dva svitka s N_1 odnosno N_2 zavoja. Odredite širinu zračnog raspora tako da uz struju I indukcija u njemu bude B_0 .

Podatci: $B_0 = 0,5 \text{ T}$, $N_1 = 400$, $N_2 = 100$, $I = 3,726 \text{ A}$, $l_z = 30 \text{ cm}$,

$S_0 = 1,1 S_z$, B - H karakteristika.

Rješenje



Sl. 1. Željezna jezgra sa zračnim rasporom i dva svitka a) i B-H karakteristika

Upotrebom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5), za zadani magnetski krug, dobije se:

$$(N_1 - N_2)I = H_z l_z + H_0 l_0 \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$l_0 = \frac{(N_1 - N_2)I - H_z l_z}{H_0} \quad (2)$$

Iz zakona o očuvanju magnetskog toka (19.9) dobije se:

$$\phi_0 = \phi_z \quad (3)$$

ili u obliku:

$$B_0 S_0 = B_z S_z \quad (4)$$

Zbog širenja magnetskih linija u zračnom rasporu (bačvasti oblik linija polja), uzima se da je presjek u zračnom rasporu veći od presjeka željezne jezgre za 10%, $S_0 = 1,1 S_z$. Iz (4) dobije se indukcija u željezu:

$$B_z = 1,1 B_0 \quad (= 0,55 \text{ T}) \quad (5)$$

Za zadanu indukciju u zračnom rasporu jakost magnetskog polja jest:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (= 397,88 \text{ kA/m}) \quad (6)$$

Za indukciju B_z iz B - H karakteristike, slika 1b, očita se jakost magnetskog polja u željezu, $H_z = 2400 \text{ A/m}$.

Uvrštavanjem zadanih i izračunatih iznosa u (2) dobije se širina zračnog raspora: $l_0 = 1 \text{ mm}$.



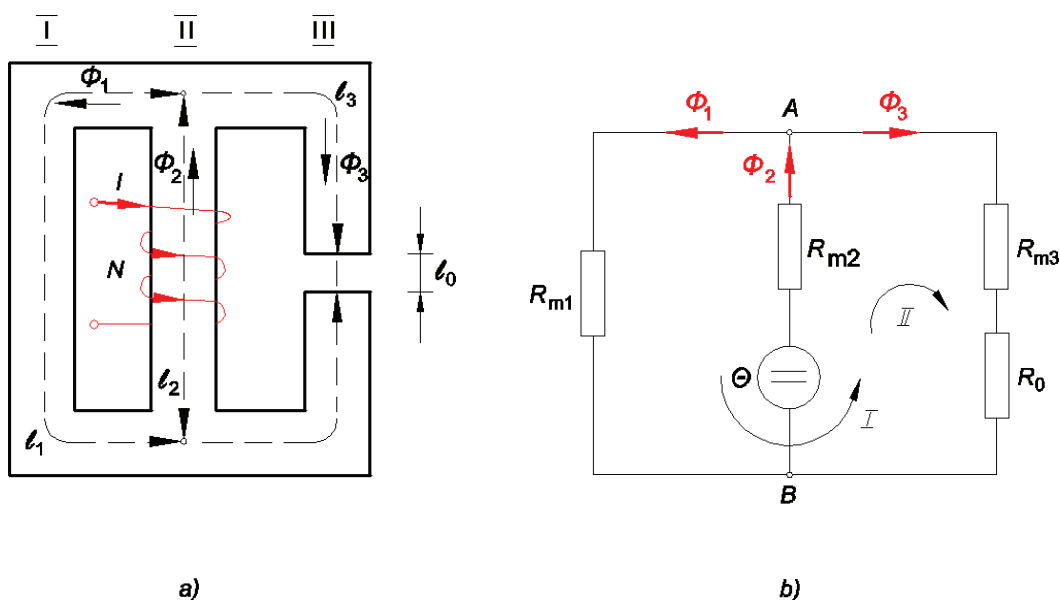
Primjer 19.6.

Zadana je trostupna feromagnetska jezgra sa zračnim rasporom i poznatim izmjerima, slika 1. Odredite potrebnu struju uzbude I tako da indukcija u zračnom rasporu bude B_0 .

Podatci: $B_0 = 0,4 \text{ T}$, $N = 350$, $l_0 = 0,3 \text{ mm}$, $l_2 = 20 \text{ cm}$, $l_3 = l_1 \cong 26 \text{ cm}$,

$S_0 = S_{\text{Fe}}$, B - H karakteristika.

Rješenje



Sl. 1. Magnetska trostupna jezgra a) i njezina nadomjesna shema b)

Zadani magnetski krug riješit će se upotrebom I. i II. Kirchhoffova zakona za magnetizam. Prvi Kirchhoffov zakon može se napisati za $n_c - 1 = 1$

jednadžba, dok se upotrebom II. Kirchhoffova zakona može napisati

$$n_p = n_g - (n_c - 1) = 2 \text{ jednadžbe:}$$

$$\text{čvor } A: \quad -\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{petlja } I: \quad H_1 l_1 - H_3 l_3 - H_0 l_0 = 0 \quad (2)$$

$$\text{petlja } II: \quad \theta = H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 l_0 \quad (3)$$

gdje je:

$$\theta = NI \quad (4)$$

magnetomotorna sila (uzbuda magnetskog kruga).

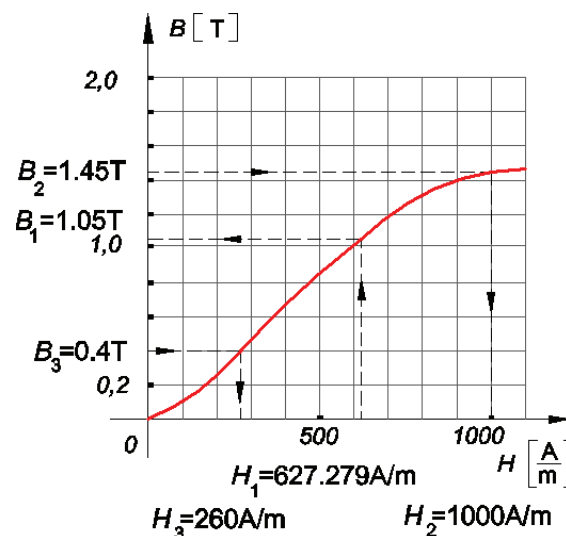
Iz (3) i (4) vidljivo je da je za odrediti uzbudnu struju magnetskog kruga potrebno odrediti jakosti polja H_0 , H_2 i H_3 .

Za zadanu indukciju B_0 u zračnom rasporu jakost magnetskog polja jest:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (= 318,309 \text{ kA/m}) \quad (5)$$

Uz $S_{\text{Fe}} = S_0$, slijedi da je $B_3 = B_0 = 0,4 \text{ T}$.

Iz krivulje prvog magnetiziranja, prema slici 2, za $B_3 = 0,4 \text{ T}$ očita se $H_3 = 260 \text{ A/m}$.



Sl. 2. Krivulja prvog magnetiziranja

Za odrediti jakost polja u srednjem (drugom) stupu nužno je odrediti indukciju B_2 . Iz (1) dobije se:

$$\phi_2 = \phi_1 + \phi_3 \quad (6)$$

Uz jednake presjeke jezgre dobije se:

$$B_2 = B_1 + B_3 \quad (7)$$

Nepoznata indukcija B_1 dobit će se iz jakosti polja H_1 i B - H karakteristike. Iz (2) dobije se:

$$H_1 = \frac{1}{l_1} (H_0 l_0 + H_3 l_3) \quad (= 627,279 \text{ A/m}) \quad (8)$$

Iz B - H karakteristike očitava se $B_1 = 1,05 \text{ T}$.

S izračunatim indukcijama u I. i III. stupu slijedi, prema (7), indukcija u drugom stupu: $B_2 = 1,45 \text{ T}$. Iz B - H karakteristike očitava se $H_2 = 1000 \text{ A/m}$.

Magnetomotorna sila, prema (3), jest: $\theta = 363,0927 \text{ Az}$. Potrebna struja uzbude, prema (4), jest: $I = 1,037 \text{ A}$.

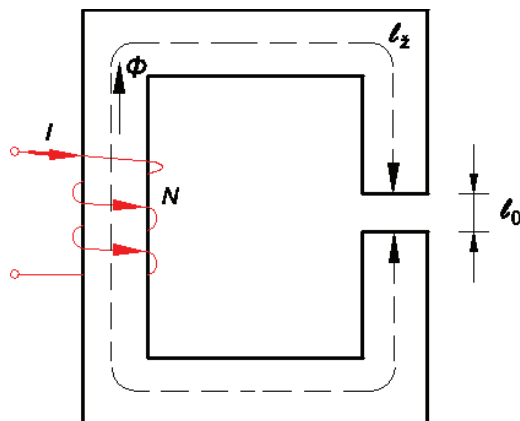


Primjer 19.7.

Na feromagnetsku jezgru sa zračnim rasporem i poznatim izmjerima, slika 1, namotano je N zavoja kojima teče struja jakosti I . Odredite magnetsku indukciju u zračnom rasporu. Krivulju prvog magnetiziranja aproksimirajte s funkcijom $B = k\sqrt{H}$.

Podatci: $I = 1,75 \text{ A}$, $N = 360$, $l_z = 35 \text{ cm}$, $l_0 = 1 \text{ mm}$, $k = 0,056 \text{ Vs/A}^{1/2} \text{ m}^{3/2}$.

Rješenje



Sl. 1. Željezna jezgra sa zračnim rasporem

Upotrebom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5) na zadani magnetski krug dobije se:

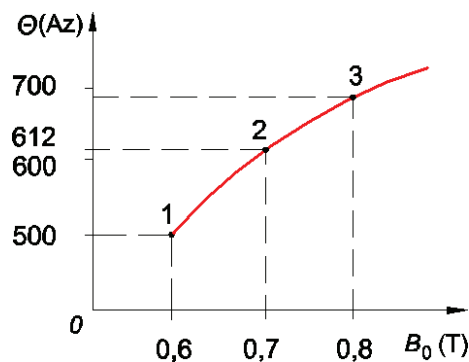
$$NI = H_z l_z + H_0 l_0 \quad (1)$$

Iz (1) vidljivo je da su nepoznanice H_0 i H_z . Dakle, ima se jedna jednadžba s dvjema nepoznanicama. Proračun ovakog kruga rješava se metodom *interpolacije*. Bit metode je da se pretpostavi indukcija u zračnom rasporu. S pretpostavljenom indukcijom načini se proračun magnetskog kruga, v. primjer 19.4. Tako dobijena uzbuda, s pretpostavljenom indukcijom, unosi se u $B - \theta$ dijagram. Indukcija u zračnom rasporu pretpostavlja se nekoliko puta. Kada se dobije nekoliko točaka u $B - \theta$ dijagramu, one se međusobno povezuju "glatkom" krivuljom, tzv. interpolacijskom krivuljom. Tada se za zadani NI iz $B - \theta$ dijagrama očita magnetska indukcija B_0 u zračnom rasporu.

Tablica pretpostavljenih (B_0) i (θ) iznosa:

Broj ponavljanja	Pretpostavljeni B_0 (T)	Pripadni H_0 (kA/m)	Izračunati (očítani) H_z (A/m)	Izračunata θ (Az)
1.	0,6	477,46	114,8	517,64
2.	0,7	557,04	156,25	611,72
3.	0,8	636,62	204,08	708,05

U dijagramu, na slici 2, uneseni su rezultati iz tablice (za tri točke) i povučena je interpolacijska krivulja.



Sl. 2. Interpolacijska krivulja u $\theta - B_0$ dijagramu

Za zadani $\theta = NI = 630 \text{ Az}$ iz dijagrama se očita indukcija u zračnom rasporu $B_0 = 0,72 \text{ T}$.

Napomena: Za zadanu magnetsku uzбудu indukcija u zračnom rasporu odredi se primjenom linearne interpolacije ili se nacрта krivulja i onda očita B_0 .



20. ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA

Ako svitak induktiviteta L prožima magnetsko polje indukcije B , tada je magnetska energija akumulirana u polju svitka, prema (27.8):

$$W_m = \int_0^I Li \, di = \frac{1}{2} LI^2 \quad (20.1)$$

gdje je I konačna vrijednost struje.

Iz (20.1) slijedi induktivitet svitka.

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (20.2)$$

20.1. Magnetska energija izražena veličinom polja

Prema (27.11) II. Sveska magnetska energija jest:

$$W_m = \int_V \int_B \vec{H} d\vec{B} \, dV \quad (20.3)$$

gdje je:

H - jakost magnetskog polja

B - magnetska indukcija

V - obujam.

Posebice, za magnetski linearnu sredinu, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, magnetska energija, prema (20.3), jest:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H}\vec{B} \, dV = \frac{1}{2} \mu \int_V H^2 \, dV = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 \, dV \quad (20.4)$$

Iz praktičnih razloga, vrlo se često umjesto magnetske energije daje podatak o gustoći magnetske energije:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} \quad (20.5)$$

Uvrštavanjem (20.3) u (20.5) dobije se:

$$w_m = \int_B \vec{H} d\vec{B} \quad (20.6)$$

Posebno za linearne sredine, gustoća magnetske energije jest:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (20.7)$$

20.2. Magnetska energija dvaju ili većeg broja svitaka

Magnetska energija dvaju svitaka u linearnoj sredini, prema (27.22)

II. Sveska jest:

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_1 I_1 \pm \psi_2 I_2) \quad (20.8)$$

gdje je:

$$\psi_1 = L_1 I_1 \pm M I_2 \quad (20.9a)$$

$$\psi_2 = L_2 I_2 \pm M I_1 \quad (20.9b)$$

ulančeni tokovi što ih ulančuje svaki od svitaka gdje se predznak (+) primjenjuje ako su tokovi u istom smjeru, a (-) ako su suprotno usmjereni.

Izraz (20.8) za magnetsku energiju dvaju svitaka može se poopćiti za n svitaka, prema (27.23) II. Sveska:

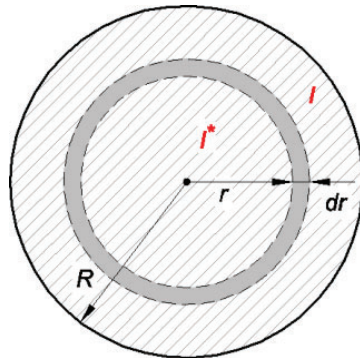
$$W_m = \frac{1}{2} \sum_K \psi_K I_K \quad (20.10)$$

Primjer 20.1.

Ravnim, beskonačno dugim vodičem kružnog presjeka teče struja konstantne jakosti I . Odredite magnetsku energiju i unutarnji induktivitet vodiča po jedinici duljine.

Podatci: $I = 120 \text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Ravni je vodič konačnog presjeka, radijusa R

Magnetska energija, u magnetski linearnim sredinama, prema (20.4), jest:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (1)$$

gdje je:

$$B = \frac{\mu_0 I^*}{2\pi r} \quad (2)$$

magnetska indukcija što je uzrokuje struja I^*

$$I^* = \frac{r^2}{R^2} I \quad (3)$$

dio ukupne struje koja prolazi vodičem površine $r^2\pi$

$$dV = 2\pi r dr h \quad (4)$$

element obujma vodiča duljine h .

Uvrštavanjem (2), (3) i (4) u (1) dobije se:

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr \quad (5)$$

Integriranjem dobije se:

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 h}{16\pi} \quad (6)$$

Magnetska energija po jedinici duljine vodiča jest:

$$W'_m = \frac{W_m}{h} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad (= 0,36 \text{ mJ/m}) \quad (7)$$

Induktivitet vodiča, po jedinici duljine, prema (20.2), jest:

$$L = \frac{2W'_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (= 50 \text{ nH/m}) \quad (8)$$

Iz (7) i (8) vidljivo je da niti energija niti induktivitet vodiča ne ovise o njegovu radijusu.

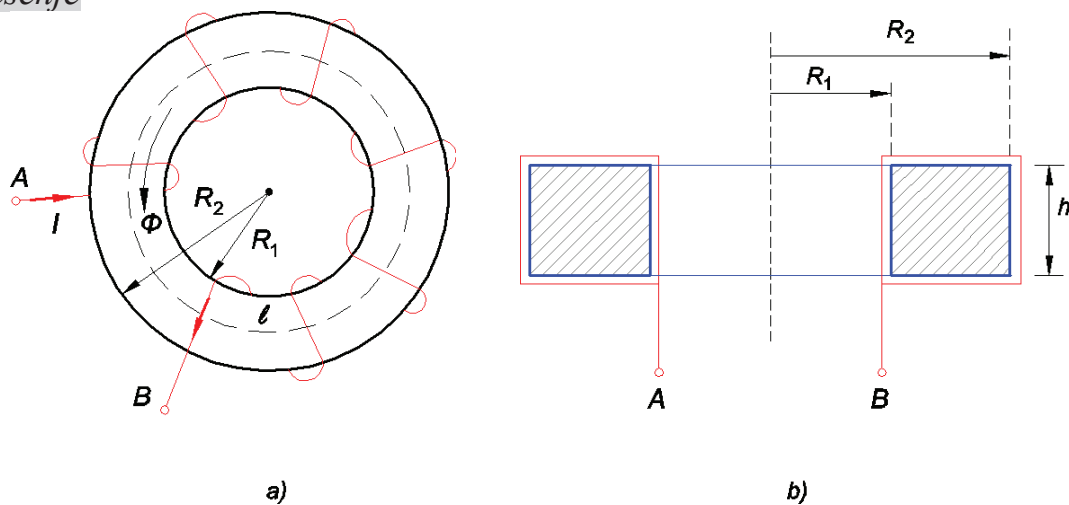


Primjer 20.2.

Torusna jezgra od nemagnetskog materijala i dimenzija $(R_2 - R_1) \times h$ namotana je sa N zavoja. Odredite magnetsku energiju akumuliranu u zavojnici i induktivitet zavojnice.

Podatci: $R_2 = 6 \text{ cm}$, $R_1 = 5 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$, $N = 650$, $I = 7 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Torusna jezgra namotana je sa N zavoja a) i njezin poprečni presjek b)

Magnetska energija, prema (20.4), jest:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (1)$$

gdje je:

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

prema (15.1), magnetska indukcija zavojnice sa N zavoja

$$dV = 2\pi r dr h \quad (3)$$

element obujma torusne jezgre.

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{N^2 \mu_0^2 I^2}{2\pi r} h dr \quad (4)$$

Integriranjem (4) dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 h I^2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (= 75,49 \text{ mJ}) \quad (5)$$

Prema (20.2) induktivitet zavojnice jest:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (= 3,08 \text{ mH}) \quad (6)$$

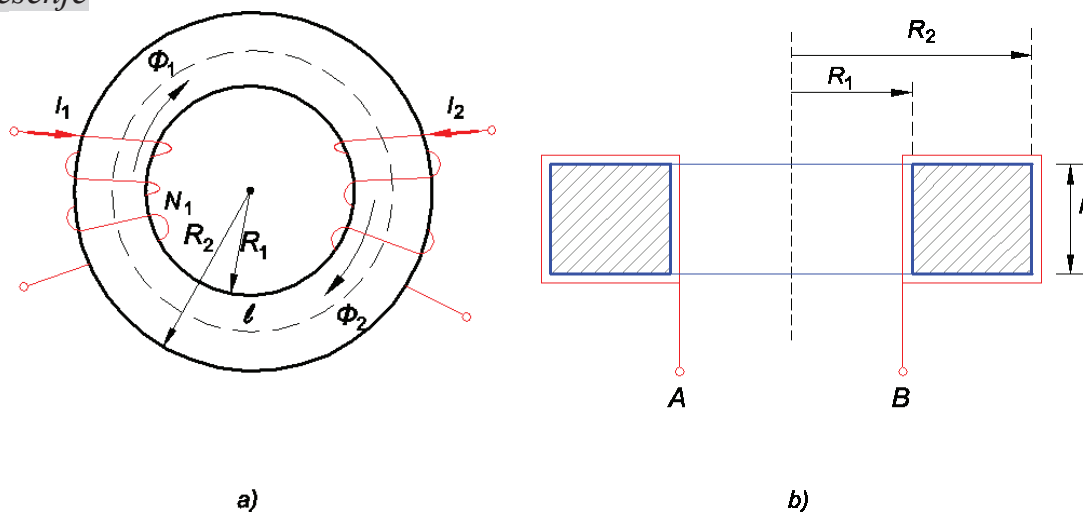


Primjer 20.3.

Na torusnu neferomagnetsku jezgru pravokutnog presjeka $(R_2 - R_1) \times h$ namotane su dvije zavojnice. Svakom od zavojnica teku struje I_1 i I_2 konstantnog iznosa. Odredite akumuliranu magnetsku energiju u torusnoj jezgri i ekvivalentni induktivitet dviju zavojnica ako su motane:

- a) u istom smjeru (sukladni tokovi)
b) u suprotnom smjeru (nesukladni tokovi).

Podatci: $R_1 = 6 \text{ cm}$, $R_2 = 7 \text{ cm}$, $h = 3 \text{ cm}$, $N_1 = 1200$, $N_2 = 800$,
 $I_1 = 1,8 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Torusna jezgra s dvjema zavojnicama a) i njezin poprečni presjek b)

Magnetska energija, prema (20.4), jest:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (1)$$

gdje je:

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2)$$

prema (15.1) magnetska indukcija zavojnice sa N zavoja

$$dV = 2\pi r dr h \quad (3)$$

element obujma torusne jezgre.

a) Ako su zavojnice namotane tako da im se vektori magnetske indukcije potpomažu, tada je magnetska energija prema (1):

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (B_1 + B_2)^2 dV \quad (4)$$

Uvrštavanjem indukcije (2) za svaki od zavoja u (4) dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr h \quad (5)$$

Integriranjem dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_0 N_1^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} I_1^2 + 2 \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} I_1 I_2 + \frac{\mu_0 N_2^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} I_2^2 \right] \quad (6)$$

Uvedu li se prikrate, prema (8) primjera 17.2.3, akumulirana energija može se pisati u obliku:

$$W_m = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2M I_1 I_2 + L_2 I_2^2) \quad (= 6,53 \text{ mJ}) \quad (7)$$

Posebno ako su zavojnice serijski spojene, $I_1 = I_2 = I$, dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} (L_1 + 2M + L_2) I^2 \quad (8)$$

Iz (8) prema **(20.2)** dobije se ekvivalentni induktivitet dviju u seriju sukladno spojenih zavojnica:

$$L_{\text{ekv}} = L_1 + 2M + L_2 \quad (= 3,628 \text{ mH}) \quad (9)$$

b) Ako su zavojnice namotane tako da im se vektori magnetske indukcije djelomično poništavaju, tada je magnetska energija, prema (1) odnosno (4):

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (B_1 - B_2)^2 dV \quad (10)$$

Ponovi li se postupak kao pod a), dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2}(L_1 I_1^2 - 2M I_1 I_2 + L_2 I_2^2) \quad (= 0,145 \text{ mJ}) \quad (11)$$

Ako su zavojnice serijski spojene, tada je ekvivalentni induktivitet, prema (20.2):

$$L_{\text{ekv}} = L_1 - 2M + L_2 \quad (= 0,219 \text{ mH}) \quad (12)$$

Iznos induktiviteta i međuinduktiviteta u (9) i (12) jest:

$$L_1 = 1,33 \text{ mH} \quad , \quad L_2 = 0,59 \text{ mH} \quad , \quad M = 0,852 \text{ mH}$$



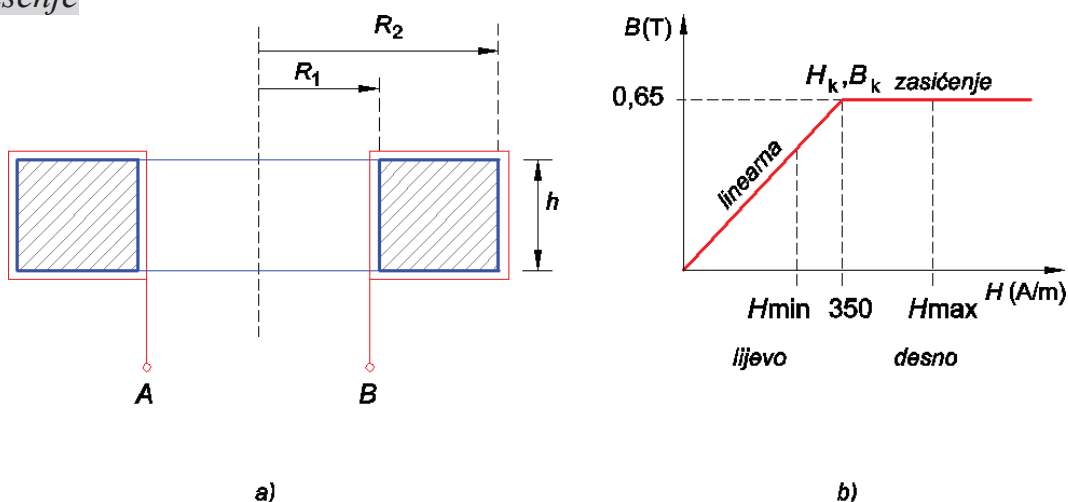
Primjer 20.4.

Torusna jezgra od magnetskog materijala dimenzija $(R_2 - R_1) \times h$ namotana je sa N zavoja. Zavojima teče struja konstantne jakosti I . Odredite magnetsku energiju akumuliranu u zavojnici i induktivitet zavojnice. Idealizirana krivulja prvog magnetiziranja prikazana je na slici 1b.

Podatci: $R_1 = 5 \text{ cm}$, $R_2 = 6 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $N = 250$, $I = 0,5 \text{ A}$,

$(H_k : B_k) = (350 \text{ A/m} : 0,65 \text{ T})$.

Rješenje



Sl. 1. Torusna jezgra a) i idealizirana krivulja prvog magnetiziranja b)

Magnetska energija, prema (20.3), jest:

$$W_m = \int_V \int_B \vec{H} d\vec{B} dV \quad (1)$$

Za odrediti magnetsku energiju nužno je odrediti maksimalnu i minimalnu jakost magnetskog polja, a u svezi s B - H karakteristikom.

$$H_{\text{maks}} = \frac{NI}{2\pi R_1} \quad (= 397,88 \text{ A/m}) \quad \text{desno} \quad (2)$$

$$H_{\text{min}} = \frac{NI}{2\pi R_2} \quad (= 331,57 \text{ A/m}) \quad \text{lijevo} \quad (3)$$

Budući da su minimalna i maksimalna jakost magnetskog polja lijevo i desno od koljena idealizirane krivulje prvog magnetiziranja, magnetska energija jest zbroj energija:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} \quad (4)$$

gdje je:

$$W_{m1} = \int_{V1} HB dV \quad (5)$$

magnetska energija akumulirana u dijelu magnetskog kruga kojem pripada zasićeni dio B - H karakteristike

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{V2} H^2 dV \quad (6)$$

magnetska energija akumulirana u dijelu magnetskog kruga kojem pripada linearni dio B - H karakteristike

$$\mu = \frac{B_K}{H_K} \quad (= 1,857 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/Am}) \quad (7)$$

permeabilnost željeza

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (8)$$

jakost magnetskog polja

$$dV = 2\pi r dr h \quad (9)$$

element obujma torusne jezgre

$$R = \frac{NI}{2\pi H_K} \quad (= 5,68 \text{ cm}) \quad (10)$$

radijus na kojem je jakost magnetskog polja $H_K = 350 \text{ A/m}$.

Uvrštavanjem (8) i (9) u (5) odnosno (6) dobije se:

$$W_{m1} = NIB_K h \int_{R_1}^R dr \quad (11a)$$

Integriranjem dobije se:

$$W_{m1} = NIB_K h (R - R_1) \quad (= 11,05 \text{ mJ}) \quad (11b)$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 I^2 h}{2\pi} \int_R^{R_2} \frac{dr}{r} \quad (12a)$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 I^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R} \quad (= 2,53 \text{ mJ}) \quad (12b)$$

Ukupna energija akumulirana u magnetskom polju svitka, prema (4), jest:

$$W_u = 13,58 \text{ mJ} .$$

Induktivitet svitka, prema (20.2) jest:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (= 108,64 \text{ mH}) \quad (13)$$



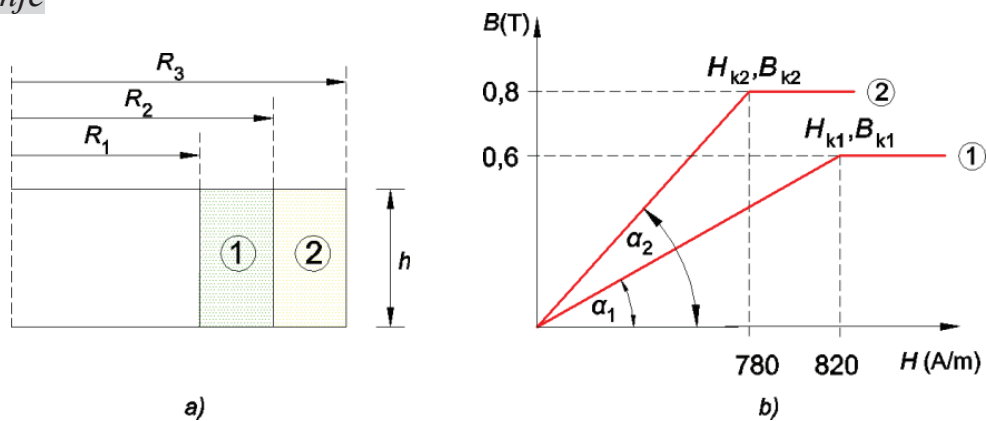
Primjer 20.5.

Torusna jezgra načinjena je od dvaju različitih feromagnetskih materijala i namotana je sa N zavoja. Zavojima teče struja konstantne jakosti I . Odredite:

- akumuliranu magnetsku energiju u zavojnici
- induktivitet zavojnice
- dimenzije (vanjski radijus) drugog sloja tako da je u njemu akumulirana jednaka količina energije kao i u prvom sloju.

Idealizirane krivulje prvog magnetiziranja prikazane su na slici 1b).

Podatci: $R_1 = 3,8 \text{ cm}$, $R_2 = 4,5 \text{ cm}$, $R_3 = 5 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $N = 360$, $I = 0,6 \text{ A}$,
 $(H_{K1} : B_{K1}) = (820 \text{ A/m} : 0,6 \text{ T})$, $(H_{K2} : B_{K2}) = (780 \text{ A/m} : 0,8 \text{ T})$.

Rješenje

Sl. 1. Dvoslojna torusna jezgra a) i idealizirane krivulje prvog magnetiziranja b)

a) Magnetska energija, prema (20.3), jest:

$$W_m = \int_V \int_B \vec{H} d\vec{B} dV \quad (1)$$

gdje je:

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (2)$$

jakost magnetskog polja u torusnoj jezgri.

Za odrediti magnetsku energiju nužno je odrediti maksimalnu i minimalnu jakost magnetskog polja svakog od magnetskih slojeva, a sve u svezi s B - H karakteristikom.

$$H_{1\text{maks}} = \frac{NI}{2\pi R_1} \quad (= 904,67 \text{ A/m}) \quad (3)$$

$$H_{1\text{min}} = \frac{NI}{2\pi R_2} \quad (= 763,94 \text{ A/m}) \quad (4)$$

Budući da je linija magnetskog polja kružnica s ishodištem u središtu torusne jezgre i koncentrična je slojevima jezgre, jakost magnetskog polja (tangencijalna komponenta) prolazi kontinuirano iz jedne u drugu sredinu. Slijedi:

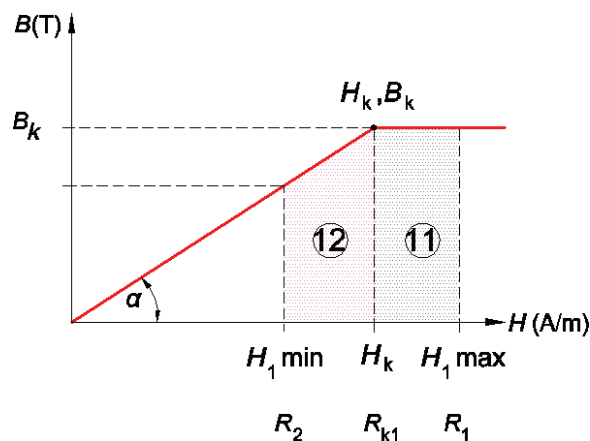
$$H_{2\text{maks}} = H_{1\text{min}} \quad (= 763,94 \text{ A/m}) \quad (5)$$

$$H_{2\text{min}} = \frac{NI}{2\pi R_3} \quad (= 687,55 \text{ A/m}) \quad (6)$$

Iz dobivenih jakosti magnetskog polja slijedi:

$H_{1\text{min}}$ i $H_{1\text{maks}}$ prvog sloja su lijevo i desno od koljena B - H karakteristike, $H_{2\text{min}}$ i $H_{2\text{maks}}$ drugog sloja su lijevo od koljena B - H karakteristike.

Računa se energija akumulirana u prvom sloju feromagnetika. Energija prvog sloja jednaka je zbroju energija lijevo i desno od koljena B - H karakteristike: slika 2.



Sl. 2. B - H karakteristika prvog feromagnetskog sloja

$$W_{ml} = W_{ml1} + W_{ml2} \quad (7)$$

gdje je:

$$W_{ml1} = \int_{V_{11}} B_K H dV \quad (8)$$

dio magnetske energije koja pripada zasićenom dijelu B - H karakteristike

$$W_{ml2} = \int_{V_{12}} \vec{H} d\vec{B} dV = \frac{1}{2} \mu \int_{V_{12}} H^2 dV \quad (9)$$

dio magnetske energije koja pripada linearnom dijelu B - H karakteristike.

Računa se energija (8):

$$W_{ml1} = \int_{V_{11}} B_K H dV$$

gdje je:

B_K - indukcija zasićenog dijela B - H karakteristike
 H - jakost magnetskog polja prema (2)

$$dV = 2\pi r dr h \quad (10)$$

element obujma torusne jezgre.

Integriranje je u granicama $[R_1, R_K]$, gdje je:

$$R_{K1} = \frac{NI}{2\pi H_{K1}} \quad (= 4,19 \text{ cm}) \quad (11)$$

radijus torusne jezgre kojoj pripada jakost magnetskog polja H_{K1} .

Uvrštavanjem (2) i (10) u (8) dobije se:

$$W_{ml1} = NIB_K h(R_{K1} - R_1) \quad (= 10,11 \text{ mJ}) \quad (12)$$

Računa se energija (9):

$$W_{m12} = \frac{1}{2} \mu_1 \int_{V_{12}} H_1^2 dV$$

gdje je:

$$\mu_1 = \frac{B_{K1}}{H_{K1}} \quad (= 0,73 \text{ mVs/Am}) \quad (13)$$

permeabilnost prvog sloja magnetske jezgre

H - jakost magnetskog polja prema (2)

dV - element obujma torusne jezgre prema (10).

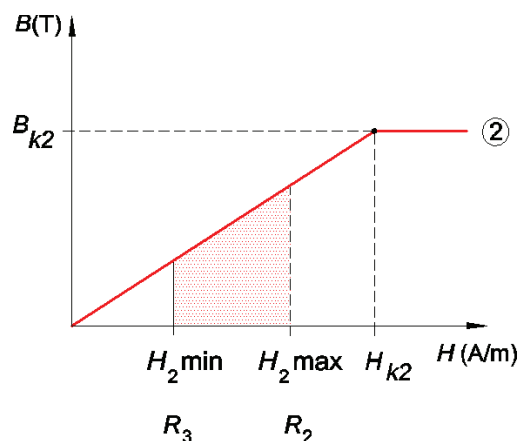
Uvrštavanjem (2) i (10) u (9) i integriranja u granicama $[R_K, R_2]$ dobije se:

$$W_{m12} = \frac{1}{2} \mu_1 \frac{N^2 I^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_K} \quad (= 3,88 \text{ mJ}) \quad (14)$$

Ukupna magnetska energija akumulirana u prvom sloju prema (7) jest:

$W_{m1u} = 13,99 \text{ mJ}$. Računa se energija akumulirana u drugom sloju

feromagnetika. Akumulirana energija, prema B - H karakteristici, slika 3, jest:



Sl. 3. B - H karakteristika drugog feromagnetskog sloja

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \mu_2 \int_{V_{12}} H^2 dV \quad (15)$$

i pripada u potpunosti linearnom dijelu B - H karakteristike.

gdje je:

$$\mu_2 = \frac{B_{K2}}{H_{K2}} \quad (= 1,025 \text{ mVs/Am}) \quad (16)$$

permeabilnost drugog sloja

H - jakost magnetskog polja prema (2)

dV - element obujma torusne jezgre prema (10).

Uvrštavanjem (16), (2) i (10) u (15) i integriranjem u granicama $[R_2, R_3]$ dobije se:

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \mu_2 \frac{N^2 I^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_3}{R_2} \quad (= 8,02 \text{ mJ}) \quad (17)$$

Ukupna magnetska energija akumulirana u zavojnici je:

$$W_{mu} = W_{mlu} + W_{m2} \quad (= 22 \text{ mJ})$$

b) Induktivitet zavojnice, prema **(20.2)**, jest:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (= 0,122 \text{ H}) \quad (18)$$

c) Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$W_{m2} \Big|_{R_3=R_3^*} = W_{mlu} \quad (19)$$

Uvrštavanjem (17) u (19) dobije se:

$$\frac{1}{2} \mu_2 \frac{N^2 I^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_3^*}{R_2} = W_{mlu}$$

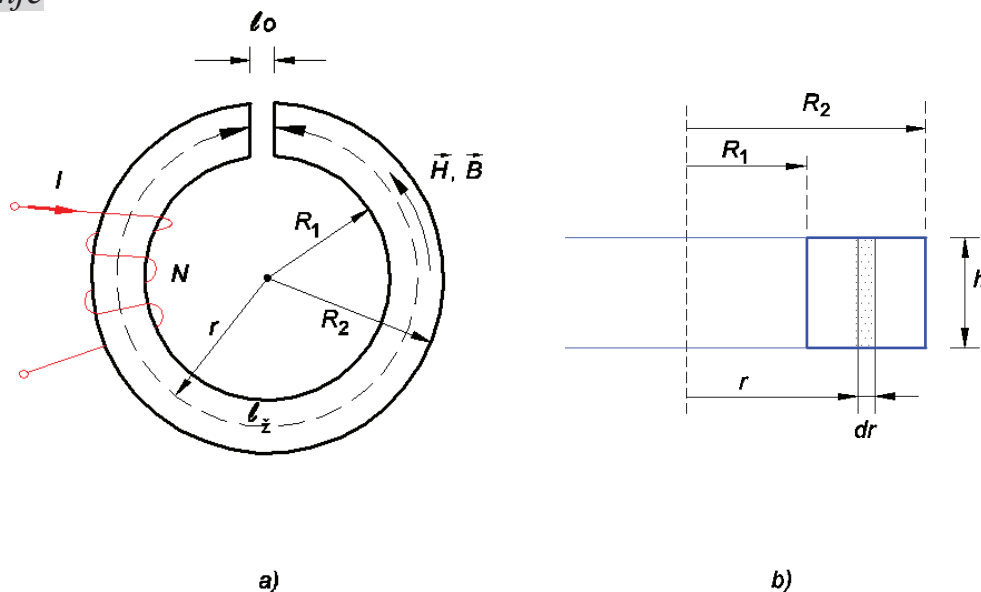
Traženi iznos $R_3^* = 5,4 \text{ cm}$.



Primjer 20.6.

Na feromagnetsku jezgru torusnog oblika sa zračnim rasporem, poznatih izmjera, slika 1, namotano je N zavoja. Odredite omjer energija akumuliranih u željezu i zračnom rasporu torusne jezgre uz pretpostavku da je radna točka na linearnom dijelu krivulje magnetiziranja feromagnetskog materijala.

Podatci: $R_1 = 5 \text{ cm}$, $R_2 = 6,5 \text{ cm}$, $l_0 = 2 \text{ mm}$, $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/m}$.

Rješenje

Sl. 1. Torusna jezgra sa zračnim rasporem a) i poprečnim presjekom b)

Magnetska energija akumulirana u linearnim sredinama, $\mu = \text{konst.}$, prema (20.4), jest:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV \quad (1)$$

Budući da linije magnetskog polja iz jedne sredine (željezo) upadaju okomito u zračni raspor, slijedi da će samo normalna komponenta indukcije proći kontinuirano: $B_0 = B_z = B$.

$$W_m = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV \quad (2)$$

Indukcija B odredit će se upotrebom Općeg oblika Ampereova zakona (19.5):

$$H_z l_z + H_0 l_0 = IN \quad (3)$$

Uz linearni odnos B - H karakteristike (3) postaje:

$$\frac{B_z}{\mu} l_z + \frac{B_0}{\mu_0} l_0 = IN \quad (4)$$

odakle je tražena indukcija:

$$B = \frac{NI}{\frac{l_z}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}} \quad (5)$$

Zanemari li se duljina zračnog raspora l_0 u odnosu na duljinu željeznog dijela jezgre: $l_z = 2\pi r - l_0 \cong 2\pi r$, jednadžba (5) postaje:

$$B = \frac{NI}{\frac{2\pi r}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}} \quad (6)$$

Računaju se energija u željezu i zračnom rasporu:

$$W_m = \frac{1}{2\mu} \int_{R_1}^{R_2} \frac{N^2 I^2}{\left(\frac{2\pi r}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}\right)^2} 2\pi r h dr \quad (7)$$

gdje je:

$$dV = 2\pi r dr h$$

element obujma željeznog dijela jezgre.

Napomena: Za riješiti (7) koristite supstituciju:

$$\frac{2\pi r}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0} = u \quad , \quad dr = \frac{\mu}{2\pi} du$$

Integriranjem (4) dobije se:

$$W_{mž} = \mu \frac{N^2 I^2 h}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} - \mu l_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] \quad (8)$$

gdje je:

$$a = \mu_0 2\pi R_1 + \mu l_0 \quad (= 4,394 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A})$$

$$b = \mu_0 2\pi R_2 + \mu l_0 \quad (= 4,513 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A})$$

$$W_{m0} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{N^2 I^2}{\left(\frac{2\pi r}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}\right)^2} l_0 h dr \quad (9)$$

gdje je:

$$dV_0 = l_0 h dr$$

element obujma zračnog raspora.

Uz naprijed navedene supstitucije integriranjem dobije se:

$$W_{m0} = \frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi} \left[\mu l_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] \quad (10)$$

Traženi kvocijent jest:

$$\frac{W_{mž}}{W_{m0}} = \frac{\ln \frac{b}{a} - \mu l_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}{\mu l_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \quad (= \frac{2,7}{24} = 0,1125)$$

ili drugačije rečeno energija akumulirana u zračnom rasporu magnetskog kruga je 8.9 puta veća od energije akumulirane u željeznoj jezgri.

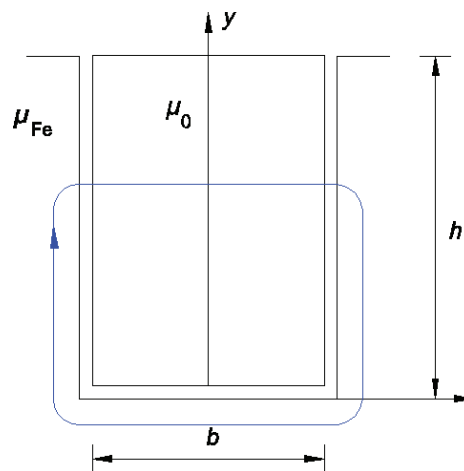


Primjer 20.7.

Odredite induktivitet pravokutnog utora električnog stroja prema slici 1. Dimenzije utora su $b \times h$. Zanimarite utjecaj debljine izolacije i pad magnetskog napona u željezu $\mu_{Fe} \rightarrow +\infty$.

Podatci: $I = 25 \text{ A}$, $b = 6 \text{ mm}$, $h = 23 \text{ mm}$.

Rješenje



Sl. 1. Linija magnetskog polja upada okomito na granici zrak-željezo

Induktivitet utora odredit će se iz magnetske energije (20.4):

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (1)$$

gdje je:

$$B = \frac{\mu_0 I^*}{b} \quad (2)$$

magnetska indukcija u utoru određena iz Ampereova zakona,

$$I^* = \frac{S^*}{S} I = \frac{y}{h} I \quad (3)$$

dio ukupne struje koju obuhvaća magnetska linija,

$$dV = b h dy \quad (4)$$

element obujma jedinične aksijalne duljine.

Uvrštavanjem (2) i (4) u (1) dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{b h^2} \int_0^h y^2 dy$$

Integriranjem dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2 h}{3b} \quad (= 0,501 \text{ mJ}) \quad (5)$$

Iz (5), prema (20.2), slijedi traženi induktivitet:

$$L = \frac{\mu_0 h}{3b} \quad (= 1,6 \mu\text{H}) \quad (6)$$



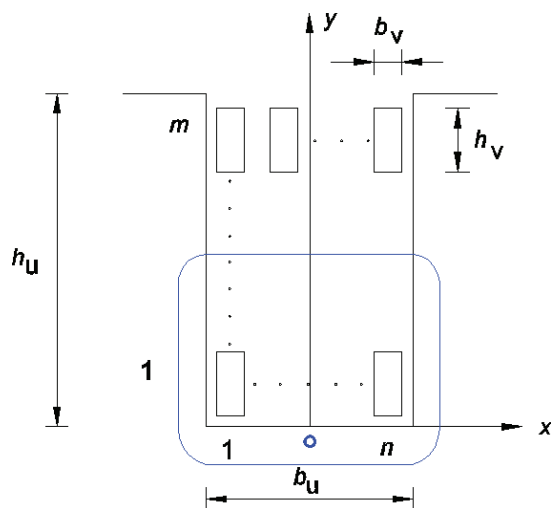
Primjer 20.8.

U utoru električnog stroja, prema slici 1, nalazi se m slojeva sa po n vodiča. Svakim od vodiča teče struja jakosti I . Odredite induktivitet utora po jedinici duljine ako se:

- ne zanemari utjecaj debljine izolacije
- zanemari utjecaj debljine izolacije.

Podatci: $I = 65 \text{ A}$, $b_u = 20 \text{ mm}$, $b_v = 3 \text{ mm}$, $h_u = 70 \text{ mm}$, $h_v = 7 \text{ mm}$, $m = 8$, $n = 6$.

Rješenje



Sl. 1. U utoru stroja nalazi se m n dionih vodiča

a) Induktivitet utora odredit će se iz magnetske energije (20.4):

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (1)$$

gdje je:

$$B = \frac{\mu_0 I^*}{b_u} \quad (2)$$

magnetska indukcija u utoru određena iz Ampereova zakona

$$I^* = \frac{S^*}{S} I_{uk} = \frac{mn}{h_u} y I_{uk} \quad (3)$$

dio ukupne struje

$$dV = b_u l dy \quad (4)$$

element obujma utora.

Uvrštavanjem (2), (3) i (4) u (1) dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 m^2 n^2 I^2}{b_u h_u^2} \int_0^{h_u} y^2 dy \quad (5)$$

Integriranjem dobije se:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 m^2 n^2 h_u}{3b_u} I^2 \quad (= 7,13 \text{ J/m}) \quad (5)$$

Iz (5) prema (20.2) dobije se traženi induktivitet:

$$L = \frac{\mu_0 m^2 n^2 h_u}{3b_u} \quad (= 3,38 \text{ mH}) \quad (6)$$

a) Ako se zanemari debljina izolacije, tada je $h_u = mh_v$ i $b_u = nb_v$ pa je induktivitet utora (6):

$$L = \frac{\mu_0 m^3 n h_v}{3b_v} \quad (= 3,025 \text{ mH}) \quad (6)$$



LITERATURA

- [1] Božilović, H. i drugi: Zbirka zadataka iz osnova elektrotehnike I, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- [2] Đekić, M., Ristanović, Z. : Zbirka rešenih zadataka iz osnova elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [3] Jajac, B. : Teorijske osnove elektrotehnike, Graphis, Zagreb, 2002.
- [4] Kuzmanović, B. : Osnove elektrotehnike I, Element, Zagreb, 2000.
- [5] Lončar, J. : Osnovi elektrotehnike I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [6] Nasar, S. A. : Schaum's 3000 solved problems in electric circuits, Publication, Data, McGraw - Hill, New York, 1998.
- [7] Nojman, L. R. , Kalantarov, P. L. : Teoriski osnovi elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1951.
- [8] Pekić, N. , Nađ, V. : Zbirka riješenih ispitnih zadataka iz OE, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [9] Pinter, V. : Osnove elektrotehnike I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [10] Popović, B. : Osnovi elektrotehnike I, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [11] Surutka, J. : Osnovi elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- [12] Šehović, E. i drugi: Osnove elektrotehnike, Zbirka primjera, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
SVEUČILIŠNA KNJIŽNICA
U SPLITU

UDK 537.2(075.8)(076)

JAJAC, Branislav

Zbirka riješenih zadataka iz osnova
elektrotehnike / Branislav Jajac,
Nedjeljka Grulović ; <crteži Ivanko
Jajac>. - Split : Fakultet elektrotehnike,
strojarstva i brodogradnje, 2022. -
(Udžbenici Sveučilišta u Splitu = Manualia
Universitatis studiorum Spalatensis)

Sv. 2a: Magnetizam. -

ISBN 978-953-290-122-1

1. Grulović, Nedjeljka
I. Elektrostatika -- Zbirka zadataka II.
Magnetizam -- Zbirka zadataka

190615003
