

Istosmjerne struje

Branislav Jajac i Nedjeljka Grulović

ISTOSMJERNE STRUJE

SVEZAK 2

Zbirka riješenih zadataka iz osnova elektrotehnike

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U SPLITU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM SPALATENTIS



Nakladnik
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Urednik
Prof. dr. sc. Vladan Papić

Autori
Prof. dr. sc. Branislav Jajac i doc. dr. sc. Nedjeljka Grulović

Recenzenti
Prof. dr. sc. Sead Berberović, FER Zagreb
Doc. dr. sc. Dino Lovrić, FESB Split

Lektor/ica
Drinka Bedalov, prof.

Crteži
Ivanko Jajac

Tehnička obrada
Mile Grulović, dipl. ing.

Objavljivanje ovog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Splitu, rješenjem KL 602-09/19-03/0003; ur. br. 2181-202-03-07-20-0014 od 17. studenoga 2020. god.



Ovo je djelo licencirano pod međunarodnom licencom CC BY-NC-ND 4.0 koja dopušta preuzimanje djela i dijeljenje s drugima, pod uvjetom da se navedu autori, te da se djelo ne smije mijenjati ili koristiti u komercijalne svrhe.

Autori i nakladnik ove knjige uložili su sve napore u njejoj pripremi sa željom da prenesu točne i mjerodavne informacije vezane s temom knjige. Autori i izdavač ni u kojem slučaju ne odgovaraju za slučajne ili posljedične štete povezane s izvedbom ili primjenom postupaka koji se u knjizi opisuju.

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U SPLITU
MANUALIA UNIVERSITATISSTUDIORUM SPALATENTIS

**ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA
IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE**

Svezak 2
ISTOSMJERNE STRUJE

Prof. dr. sc. Branislav Jajac i doc. dr. sc. Nedjeljka Grulović

Split, 2022.

Našim prijateljima

Bolje je vjerovati i biti prevaren nego
ne vjerovati i ne biti prevaren.

njemačka poslovice

SADRŽAJ

PREDGOVOR

11. OSNOVNI ZAKONI ELEKTRIČNOG STRUJNOG KRUGA	1
12. REALNI STRUJNI KRUG	37
13. LINEARNE ELEKTRIČNE MREŽE ISTOSMJERNE STRUJE	113
Metode i teoremi	
13.1.Primjena Kirchhoffovih zakona	114
13.2.Metoda konturnih struja	122
13.3.Metoda superpozicije	131
13.4.Metoda potencijala čvorova	146
13.5.Theveninov teorem.....	158
13.6.Nortonov teorem.....	185
13.7.Millmanov teorem	210
13.8.Elektrostaticke mreže (mreže s kondezatorima)	222
LITERATURA	243

PREDGOVOR

Udžbenik „Zbirka riješenih zadataka iz osnova elektrotehnike” drugi je u nizu od tri sveska koji će biti dostupni studentima prve godine na studiju Elektrotehnike i informacijske tehnologije Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Sveučilišta u Splitu. Nadamo se da će ovaj udžbenik koristiti i studenti ostalih sveučilišta u Hrvatskoj na kojima se izučavaju osnove elektrotehnike. Predmet ovog drugog sveska primjeri su iz ISTOSMJERNIH STRUJA i predstavljaju dio ispitnih zadataka na ovom kolegiju. Riješeni primjeri oslanjaju se na teoriju koja je detaljno razložena u referentnom udžbeniku (Teorijske osnove elektrotehnike, Svezak II, autor prof. dr. sc. Branislav Jajac). S pravom se postavlja pitanje zašto RIJEŠENI primjeri. Razlog je u promjeni načina studiranja. Prije "bolonje" studenti su zaista studirali, a poslije nje studiranje se pretvorilo u učenje na mah u kojem studenti nemaju vremena posvetiti se studiranju koje mi poznajemo. Mišljenja smo da će im zbirka riješenih zadataka olakšati ovakav način studiranja.

Zahvaljujemo se recenzentima na uloženom trudu.

Split, listopad 2020.

Autori

11. OSNOVNI ZAKONI ELEKTRIČNOG STRUJNOG KRUGA

Ohmov zakon

Ovisnost struje o naponu i otporu, prema (14.2)*, jest:

$$I = \frac{U}{R} \quad \left(\frac{V}{\Omega} = A\right) \quad (11.1)$$

gdje je:

U - napon, razlika potencijala (V),
 R - električni otpor ($\Omega = V/A$).

Ako je vodič duljine L , presjeka S i karakteristike materijala κ odnosno ρ , tada je njegov otpor:

$$R = \frac{L}{\kappa S} = \frac{\rho L}{S} \quad (11.2)$$

gdje je:

ρ - električna otpornost ($\Omega\text{mm}^2/\text{m}$),
 κ - električna provodnost (Sm/mm^2).

Otpor vodiča zbog promjene temperature, prema (14.10), jest:

$$R_{\vartheta} = R_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta\vartheta) \quad (11.3)$$

gdje je:

R_{ϑ} - otpor vodiča na temperaturi ϑ ($^{\circ}\text{C}$),
 R_{20} - otpor vodiča na sobnoj temperaturi od 20°C ,
 $\Delta\vartheta$ - razlika temperature u odnosu na sobnu temperaturu ($\vartheta - 20^{\circ}\text{C}$),
 α_{20} - temperaturni koeficijent ($1/^{\circ}\text{C}$).

Jouleov zakon

Ovim zakonom podrazumijeva se izraz uz pomoć kojeg se može izračunati koliko se kinetičke energije slobodnih elektrona pretvori u toplinsku energiju u jedinici vremena. Prema (14.20) jest:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = GU^2 \quad (\text{W}) \quad (11.4)$$

Ako se električna energija u potpunosti pretvara u toplinsku energiju prema (14.21), snaga P izražava se kao promjena topline ΔQ u vremenu Δt , pa (11.4) postaje:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 R \quad (11.5)$$

* Broj jednadžbe u udžbeniku II. Sveska.

Prvi i Drugi Kirchhoffov zakon

Prvi Kirchhoffov zakon ili zakon čvora, prema (14.30), jest:

$$a \lg \sum_k I_k = 0 \quad (11.6)$$

Zbroj struja čvorišta jednak je nuli. Struje koje ulaze u čvorište uzimaju se s pozitivnim predznakom, a struje koje izlaze s negativnim predznakom.

Drugi Kirchhoffov zakon ili zakon petlje, prema (14.35), jest:

$$a \lg \sum_i E_i = a \lg \sum_k I_k R_k \quad (11.7)$$

U zatvorenoj petlji algebarski zbroj EMS jednak je algebarskom zbroju napona $I_k R_k$. EMS E_i je pozitivna ako se njen smjer podudara sa smjerom obilaska strujne petlje. Predznak napona $I_k R_k$ je pozitivan ako se smjer obilaska strujne petlje podudara sa smjerom struje I_k kroz otpor R_k .

Ohmov zakon za element strujnog kruga. Struja koja teče elementom strujnog kruga, prema (14.34), jest:

$$I^* = \frac{U_{AB} + a \lg \sum_i E_i}{a \lg \sum_k R_k} \quad (11.8)$$

gdje je:

U_{AB} razlika potencijala između čvorova A i B elemenata strujnog kruga,

$a \lg \sum_i E_i$ algebarski zbroj EMS elemenata strujnog kruga (EMS je pozitivna ako se njezin smjer poklapa sa smjerom struje i obrnuto),

$\sum_k R_k$ zbroj otpora elemenata strujnog kruga.

Napon između čvorova A i B elemenata strujnog kruga, prema (14.33), odnosno iz izraza (11.8)** jest:

* U (11.8) i (11.9) pretpostavlja se da struja teče od čvora A (veći potencijal) k čvoru B (manji potencijal).

** Broj jednadžbe u zbirci zadataka.

$$U_{AB} = I \sum_k R_k - a \lg \sum_i E_i \quad (11.9)$$

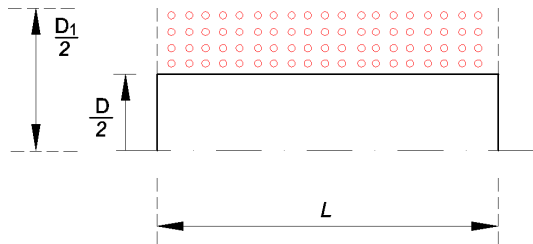
Napon U_{AB} je pozitivan ako je čvor A na većem potencijalu od čvora B , i obratno.

Primjer 11.1.

Svitak (zavojnica) s N zavoja namotan je na cilindrično tijelo duljine L i promjera D . Ako je vanjski promjer svitka D_1 , a presjek bakrenog vodiča S , odredite otpor ovog svitka.

Podatci: $D = 10 \text{ mm}$, $D_1 = 26 \text{ mm}$, $S = 0,5 \text{ mm}^2$, $L = 40 \text{ mm}$.

Rješenje



Sl. 1. N zavoja namotano je na tijelo cilindričnog oblika

Otpor svitka, prema (11.2), jest:

$$R = \frac{L_v}{\kappa_{\text{cu}} S} \quad (1)$$

gdje je:

$$L_v = N D_{\text{sr}} \pi \quad (= 28,27 \text{ m}) \quad (2)$$

duljina vodiča od kojeg je načinjen svitak,

$$D_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(D_1 + D) \quad (= 18 \text{ mm}) \quad (3)$$

srednji dijametar svitka,

$$N = \frac{L}{D_{\text{vodiča}}} \frac{D_1 - D}{2D_{\text{vodiča}}} \quad (= 500) \quad (4)$$

broj zavoja svitka,

$$D_{\text{vodiča}} = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (= 0,8 \text{ mm}) \quad (5)$$

promjer vodiča svitka.

Uz provodnost bakra, prema tablici 13.1 II. Sveska, ($= 57 \text{ Sm/mm}^2$) otpor svitka jest: $R = 0,99 \Omega$.



Primjer 11.2.

Odredite za koliko se poveća otpor voda duljine L i presjeka S ako se bakreni vodiči zamjene aluminijskim.

Podatci: $L = 2,5 \text{ km}$, $S = 16 \text{ mm}^2$.

Rješenje Otpor voda (2 vodiča), prema (11.2), jest:

$$R = 2 \frac{L}{\kappa S} \quad (1)$$

gdje je:

L duljina voda (m),

κ provodnost bakra i aluminijska, prema tablici 13.1 II. Sveska,

jest $\kappa_{\text{Cu}} = 58 \text{ Sm/mm}^2$, $\kappa_{\text{Al}} = 37 \text{ Sm/mm}^2$,

S presjek vodiča (mm^2).

Uvrštavanjem zadanih veličina u (1) dobije se:

$$R_{\text{Cu}} = 5,39 \Omega \qquad R_{\text{Al}} = 8,45 \Omega$$

Povećanje otpora:

$$\Delta R = R_{\text{Al}} - R_{\text{Cu}} \quad (= 3,06 \Omega) \quad (2)$$



Primjer 11.3.

Namot električnog stroja načinjen je od bakra duljine L i presjeka S . Odredite za koliko će se povećati otpor namota, prema otporu pri sobnoj temperaturi, ako je radna temperatura stroja ϑ .

Podatci: $L = 95 \text{ m}$, $S = 1,5 \text{ mm}^2$, $\vartheta = 85^\circ \text{C}$.

Rješenje Otpor namota pri sobnoj temperaturi, prema (11.2), jest:

$$R_{20} = \frac{L}{\kappa_{\text{Cu}} S} \quad (= 1,09 \Omega) \quad (1)$$

gdje je:

L - duljina vodiča (m),
 κ_{Cu} - provodnost bakra ($= 58 \text{ Sm/mm}^2$),
 S - presjek vodiča (mm^2).

Otpor pri temperaturi 85°C , prema (11.3), jest:

$$R_{85} = R_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta\vartheta) \quad (= 1,37 \Omega) \quad (2)$$

gdje je:

α_{20} - temperaturni koeficijent bakra ($= 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$),
 $\Delta\vartheta$ - razlika temperature u odnosu na sobnu temperaturu ($85^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 65^\circ\text{C}$).

Povećanje otpora jest:

$$\Delta R = R_{85} - R_{20} \quad (= 0,27 \Omega) \quad (3)$$

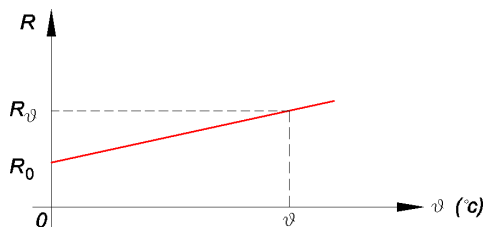


Primjer 11.4.

Na koju temperaturu treba zagrijati bakrenu žicu temperature 0°C da se njezin otpor udvostruči?

Podatci: $\alpha_{\text{Cu}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ - tablica 13.1 II. Sveska.

Rješenje



Sl. 1. Promjena otpora s porastom temperature

Promjena otpora s povećanjem temperature, (uz linearizaciju) prema (11.3), s početnom temperaturom 0°C jest:

$$R_\vartheta = R_0(1 + \alpha\vartheta) \quad (1)$$

Prema zahtjevu zadatka, kod temperature ϑ iznos otpora jest $R_g = 2R_0$

Prema (1) dobije se:

$$2R_0 = R_0(1 + \alpha\vartheta) \quad (2)$$

Iz (2) dobije se:

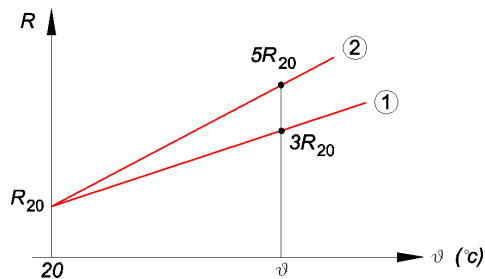
$$\vartheta = \frac{1}{\alpha} \quad (= 256,4^\circ\text{C}) \quad (3)$$



Primjer 11.5.

Otpori dva otpornika rastu linearno s porastom temperature od jednake početne vrijednosti pri 20°C (slika 1). Pri temperaturi ϑ otpor prvog otpornika je $3R_{20}$, a drugog $5R_{20}$. Odredite omjer temperaturnih koeficijenata α_1 i α_2 .

Rješenje



Sl. 1. Dijagram promjene temperature linearnih otpornika

Promjena otpora uslijed promjene temperature, prema (11.3), jest:

$$R_g = R_{20}(1 + \alpha \Delta\vartheta) \quad (1)$$

Prema zadatku i (1) dobije se:

$$R_{1,g} = R_{20}(1 + \alpha_1 \Delta\vartheta) \quad (2)$$

$$R_{2,g} = R_{20}(1 + \alpha_2 \Delta\vartheta) \quad (3)$$

Iz (2) i (3) i uvjeta zadatka da je $R_{1,g} = 3R_{20}$ i $R_{2,g} = 5R_{20}$ dobije se:

$$3 = 1 + \alpha_1 \Delta\vartheta \quad (4)$$

$$5 = 1 + \alpha_2 \Delta \vartheta \quad (5)$$

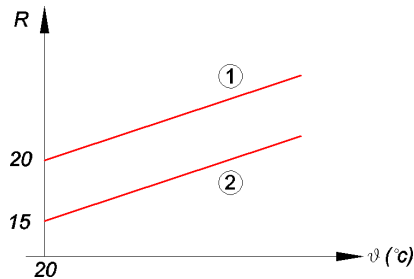
Dijeljenjem (4) sa (5) dobije se: $\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 2$.



Primjer 11.6.

Promjena otpora dva otpornika s porastom temperature (paralelni procesi) prikazana je na slici 1. Odredite omjer njihovih temperaturnih koeficijenata.

Rješenje



Sl. 1. Promjena otpora s porastom temperature

Otpor kod bilo koje temperature ϑ , prema (11.3), jest:

$$R_{\vartheta} = R_{20} + \Delta R \quad (1)$$

gdje je:

$$\Delta R = R_{20} \alpha_{20} \Delta \vartheta \quad (2)$$

prirast otpora.

Budući da se prirast otpora mijenja po pravcu, a pravci su međusobno paralelni, slijedi da je njihov koeficijent smjera međusobno jednak:

$$k = \frac{\Delta R}{\Delta \vartheta} = R_{20} \alpha \quad (3)$$

Iz (3) slijedi:

$$R_{20,1} \alpha_1 = R_{20,2} \alpha_2 \quad (4)$$

Iz (4) dobije se:

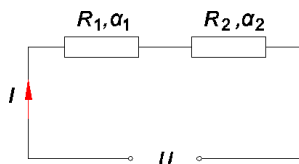
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{R_{20,2}}{R_{20,1}} \quad (= 0,75)$$



Primjer 11.7.

Dva otpornika, temperaturno ovisna, serijski su spojena (slika 1). U kakvom odnosu moraju biti temperaturni koeficijenti da struja izvora ostane konstantna?

Podatci: $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $\alpha_1 = 1,6 \cdot 10^{-3}\ \text{°C}^{-1}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema serijskog spoja dva temperaturno ovisna otpornika

Struja serijskog spoja određena je uporabom II. Kirchhoffova zakona: Prema (11.7) dobije se:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \text{konst.} \quad (= K_1) \quad (1)$$

Uz $U = \text{konst.}$, struja će biti konstantna ako je zbroj otpora konstantan:

$$R_1 + R_2 = \text{konst.} \quad (= K_2) \quad (2)$$

Vrijednost otpora kod bilo koje temperature ϑ , prema (2), jest:

$$R_1(1 + \alpha_1 \Delta \vartheta) + R_2(1 + \alpha_2 \Delta \vartheta) = K_2 \quad (3)$$

ili u obliku:

$$R_1 \alpha_1 + R_2 \alpha_2 = K_3 \quad (4)$$

gdje je K_3 konstanta bilo kojeg iznosa, pa i nule.

Iz (4) slijedi:

$$\alpha_2 = -\frac{R_1}{R_2} \alpha_1 \quad (= -2,4 \cdot 10^{-3}\ \text{°C}^{-1}) \quad (5)$$

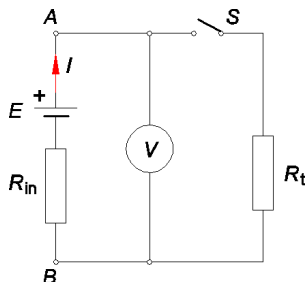


Primjer 11.8.

Na električni naponski izvor spojeni su voltmetar i trošilo otpora R_t (slika 1).
 Odredite pokazivanje voltmetra ako je:

- sklopka S otvorena
- sklopka S zatvorena.

Podatci: $E = 24 \text{ V}$, $R_{in} = 1 \Omega$, $R_t = 5 \Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Mjerenje napona

a) Ako je sklopka S otvorena, tada voltmetar mjeri EMS^* naponskog izvora, $U_{AB}=E$ (prazni hod) pa struja ne teče strujnim krugom:

$$I = \frac{E}{R_{in} + R_v} = 0, \quad \text{kada } R_v \rightarrow \infty \quad (1)$$

b) Ako je sklopka S zatvorena, voltmetar mjeri napon U_{AB} na priključnicama naponskog izvora, odnosno pad napona na trošilu R_t . Prema Ohmovu zakonu za element strujnog kruga (11.9) dobije se (za naznačeni smjer struje):

$$U_{AB} = I R_t \quad (2)$$

ili

$$U_{AB} = E - I R_{in} \quad (3)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_{in} + R_t} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (4)$$

struja strujnog kruga.

* Ako posebno nije naglašeno, uzima se da unutarnji otpor voltmetra $R_v \rightarrow \infty$.

Napon U_{AB} prema (2) i (3) jest: $U_{AB} = 20\text{ V}$.

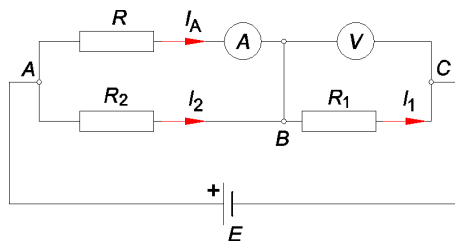


Primjer 11.9.

Za shemu prema slici 1 odredite iznos otpora R .

Podatci: $I_A = 2\text{ A}$, $U_V = 30\text{ V}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 6\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Otpor R odredit će se iz jednakosti napona U_{AB} na paralelnim granama:

$$R = R_2 \frac{I_2}{I_A} \quad (1)$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona (11.6) određuje se struja paralelne grane I_2 .

$$I_2 = I_1 - I_A \quad (2)$$

Struja I_1 određena je naponom voltmetra $U_V = U_{BC}$.

$$I_1 = \frac{U_V}{R_1} \quad (= 5\text{ A}) \quad (3)$$

Iz (2) uz (3) slijedi struja paralelne grane jest: $I_2 = 3\text{ A}$.

Uvrštavanjem zadanih i izračunatih vrijednosti u (1) vrijednost traženog otpora jest: $R = 9\Omega$.

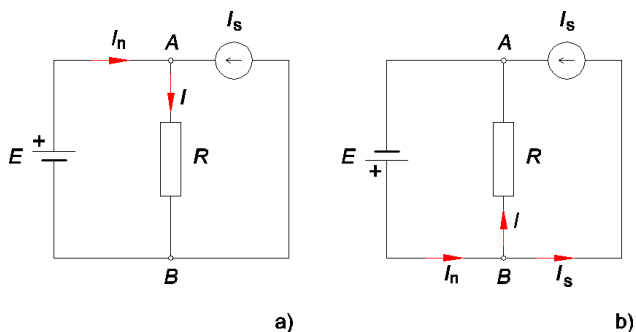


* Ako posebno nije naglašeno, uzima se da unutarnji otpor ampermetra $R_A \rightarrow 0$.

Primjer 11.10.

Idealni naponski i strujni izvori napajaju trošilo otpora R . Odredite struju što je daje naponski izvor za shemu spoja prema slici 1a, odnosno 1b.

Podatci: $E = 12\text{ V}$, $R = 3\ \Omega$, $I_s = 4\text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Za shemu na slici 1a: Uporabom I. Kirchhoffova zakona (11.6) za čvor A dobije se:

$$I_n = I - I_s \quad (1)$$

gdje je:

I_n - struja naponskog izvora,

I_s - struja strujnog izvora.

Napon (razlika potencijala) između čvorova A i B jednak je elektromotornoj sili naponskog izvora E :

$$U = E = IR \quad (2)$$

iz (2) dobije se:

$$I = \frac{E}{R} \quad (= 4\text{ A}) \quad (3)$$

Budući da je struja trošila I jednaka struji strujnog izvora I_s , iz (1), slijedi da je struja naponskog izvora $I_n=0$.

Za shemu na slici 1b: Uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor B dobije se:

$$I_n = I + I_s \quad (4)$$

Struja trošila prema (3) jest $I = 4 \text{ A}$, uz suprotni smjer, dok je struja strujnog izvora, zadani podatak, $I_s = 4 \text{ A}$. Prema (4) slijedi $I_n = 8 \text{ A}$.

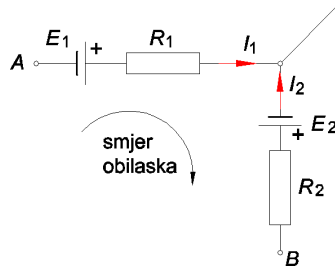


Primjer 11.11.

Za dio električne mreže, prema slici 1, odredite napon U_{AB} .

Podatci: $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 24 \text{ V}$, $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema dijela mreže

Napon između čvorova A i B (slika 1), prema (11.9), jest:

$$U^*_{AB} = I \sum_k R_k - a \lg \sum_i E_i \quad (1)$$

Na shemi između čvorova A i B postoje dvije grane gdje je struja druge grane suprotna smjeru obilaska:

$$U_{AB} = (I_1 R_1 - E_1) - (I_2 R_2 + E_2) \quad (= 8 \text{ V}) \quad (2)$$

Do istog rezultata dolazi se prateći prirast/pad potencijala pojedinih parametara strujnog kruga.

$$\varphi_A + E_1 - I_1 R_1 + I_2 R_2 + E_2 = \varphi_B \quad (3)$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = I_1 R_1 - E_1 - I_2 R_2 - E_2$$

ili u obliku

* Jednadžba (1) je tako napisana da se grana mreže opisuje u smjeru struje.

$$U_{AB} = (I_1 R_1 - E_1) - (I_2 R_2 + E_2) \quad (4)$$

što je jednako jednadžbi (2).

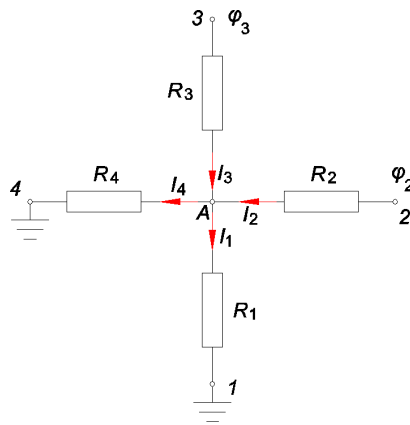


Primjer 11.12.

Na slici 1 prikazana je shema dijela električne mreže. Odredite potencijal čvora A .

Podatci: $\varphi_2 = 20 \text{ V}$, $\varphi_3 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema dijela mreže

Potencijal čvora A odredit će se uporabom I. Kirchhoffova zakona (11.6) i Ohmova zakona za element (granu) mreže (11.8).

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 \quad (1)$$

gdje je:

$$I_1 = \frac{\varphi_A}{R_1} \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_A}{R_2} \quad (2a)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_A}{R_3} \quad I_4 = \frac{\varphi_A}{R_4} \quad (2b)$$

Potencijali φ_2 i φ_3 su zadani, dok su potencijali φ_1 i φ_4 jednaki nuli (uzemljene stezaljke).

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$-\frac{\varphi_A}{R_1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_A}{R_2} + \frac{\varphi_3 - \varphi_A}{R_3} - \frac{\varphi_A}{R_4} = 0 \quad (3)$$

Iz (3) dobije se:

$$\varphi_A = \frac{\frac{\varphi_2}{R_2} + \frac{\varphi_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad (= 7,5 \text{ V}) \quad (4)$$

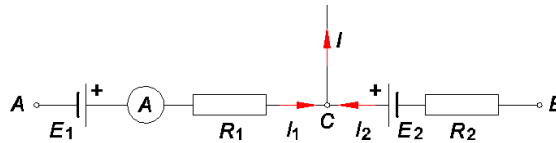


Primjer 11.13.

Na dijelu električne mreže, čija je shema prikazana na slici 1, izmjeren je napon među njezinim stezaljkama A i B , U_{AB} i struja jedne grane, I_1 . Odredite jakost struje I .

Podatci: $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 24 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $I_1 = 2 \text{ A}$, $U_{AB} = 15 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema dijela mreže

Struja I odredit će se uporabom I. Kirchhoffova zakona (11.6) u čvoru C :

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

Uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.9) dobije se:

$$U_{AB} = (-E_1 + I_1 R_1) - (I_2 R_2 - E_2) \quad (2)$$

Iz (2) dobije se:

$$I_2 = -\frac{U_{AB} + E_1 - E_2 - I_1 R_1}{R_2} \quad (= 3 \text{ A}) \quad (3)$$

Uvrštavanjem zadanih i izračunatih iznosa u (1) dobije se: $I = 5 \text{ A}$.

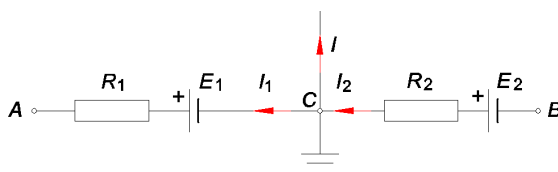


Primjer 11.14.

Na dijelu električne mreže, čija je shema prikazana na slici 1, izmjereni su naponi čvorova φ_A i φ_B (u odnosu na čvor C – uzemljeni čvor). Odredite jakosti struja u svim granama.

Podatci: $E_1 = 24 \text{ V}$, $E_2 = 48 \text{ V}$, $\varphi_A = 10 \text{ V}$, $\varphi_B = 15 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 11 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema dijela mreže

Struja I_1 i I_2 odredit će se uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.9).

$$U_{CA} = \varphi_C - \varphi_A = I_1 R_1 - E_1 \quad (1)$$

$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C = I_2 R_2 - E_2 \quad (2)$$

Budući da je čvor C uzemljen, $\varphi_C = 0$, slijede struje grana.

$$I_1 = \frac{E_1 - \varphi_A}{R_1} \quad (= 7 \text{ A}) \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{E_2 + \varphi_B}{R_2} \quad (= 5,73 \text{ A}) \quad (4)$$

Struja I u trećoj grani određuje se uporabom I. Kirchhoffova zakona (11.6) za čvor C.

$$I = I_2 - I_1 \quad (= -1,27 \text{ A}) \quad (5)$$

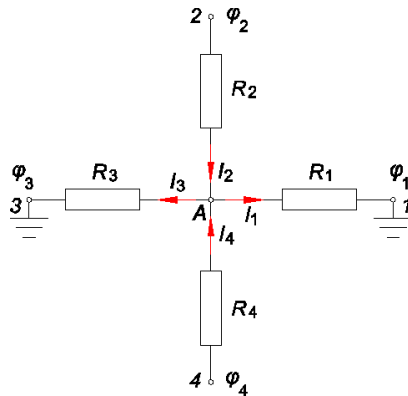
Iz rezultata slijedi da je pretpostavljeni smjer struje I pogrešan.



Primjer 11.15.

Na slici 1 prikazana je shema dijela električne mreže. Odredite otpor R_1 tako da čvor mreže A bude na potencijalu φ_A .

Podatci: $\varphi_A = 10\text{ V}$, $\varphi_2 = 24\text{ V}$, $\varphi_4 = 12\text{ V}$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 1\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Shema dijela mreže

Otpor R_1 odredit će se uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.8) – grane mreže A -1:

$$R_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_1}{I_1} \quad (1)$$

gdje je struja I_1 određena I. Kirchhoffovim zakonom (11.6).

$$I_1 = I_2 - I_3 + I_4 \quad (2)$$

Struje I_2 , I_3 i I_4 određuju se uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.8).

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_A}{R_2} \quad (= 7\text{ A}) \quad I_3 = \frac{\varphi_A - \varphi_3}{R_3} \quad (= 2\text{ A}) \quad (3a)$$

$$I_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_A}{R_4} \quad (= 2\text{ A}) \quad (3b)$$

gdje su φ_2 i φ_4 zadani, dok su potencijali φ_1 i φ_3 jednaki nuli (uzemljena stezaljka).

Struja I_1 prema (2) jest: $I_1 = 7 \text{ A}$.

Iz (1) dobije se: $R_1 = 1,43 \Omega$.

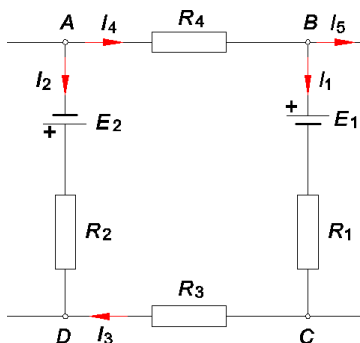


Primjer 11.16.

Na slici 1 prikazana je shema dijela električne mreže. Odredite napon U_{ABC} odnosno U_{ADC} .

Podatci: $R_1 = 1 \Omega$, $E_1 = 10 \text{ V}$, $R_2 = 5 \Omega$, $E_2 = 4 \text{ V}$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$,
 $I_2 = 5 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$, $I_4 = 2 \text{ A}$, $I_5 = 1 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema dijela mreže

Traženi napon odredit će se uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.9):

$$U_{AC} = U_{ABC} = I_4 R_4 + (I_1 R_1 + E_1) \quad (= 15 \text{ V}) \quad (1)$$

gdje je:

$$I_1 = I_4 - I_5 \quad (2)$$

Također je:

$$U_{AC} = U_{ADC} = (I_2 R_2 - E_2) - I_3 R_3 \quad (= 15 \text{ V}) \quad (3)$$

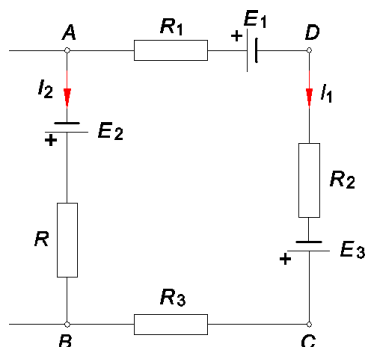


Primjer 11.17.

Na slici 1 prikazana je shema dijela električne mreže. Odredite:

- nepoznati otpor R
- napon U_{CA} .

Podatci: $R_1 = 2R_2 = 3R_3 = 30\Omega$, $I_1 = 2\text{ A}$, $I_2 = 3\text{ A}$, $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 15\text{ V}$, $E_3 = 20\text{ V}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema dijela mreže

a) Nepoznati otpor R odredit će se iz jednakosti napona dviju paralelnih grana U_{AB} i U_{ADCB} . Uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.9) dobije se:

$$U_{ADCB} = I_1(R_1 + R_2 + R_3) + E_1 - E_3 \quad (1)$$

$$U_{AB} = I_2 R - E_2 \quad (2)$$

Izjednačavanjem (1) i (2) dobije se:

$$R = \frac{1}{I_2} [I_1(R_1 + R_2 + R_3) + E_1 - E_3 + E_2] \quad (= 38,33\Omega) \quad (3)$$

b) Napon U_{AC} za zadani smjer struje I_1 , prema (11.9), jest:

$$U_{AC} = I_1(R_1 + R_2) + E_1 - E_3 \quad (= 80\text{ V})$$

Traženi napon U_{CA} jest:

$$U_{CA} = -U_{AC} = -80\text{ V}$$

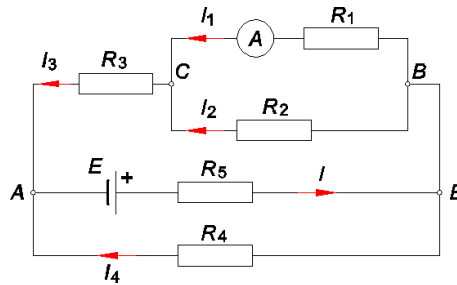


Primjer 11.18.

Ampermetar, sa sheme (slika 1), pokazuje struju jakosti I_1 . Odredite:

- struje u ostalim granama mreže
- elektromotornu silu E .

Podatci: $I_1 = 2 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R = 2 \Omega$, $R_3 = R_4 = 4R$, $R_5 = R/2$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

a) Na shemi sa slike 1 nacrtani su pretpostavljeni smjerovi struja. Iz iste slike vidljivo je da se paralelne grane s otporima R_1 i R_2 nalaze pod istim naponom U_{DC} .

$$U_{BC} = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 \quad (= 2 \text{ A}) \quad (2)$$

Za čvor C, prema I. Kirchhoffovu zakonu (11.6), dobije se:

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (= 4 \text{ A}) \quad (3)$$

Napon U_{BA} , prema (11.7), jest:

$$U_{BA} = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (= 36 \text{ V}) \quad (4)$$

Uz poznati napon U_{BA} struja I_4 jest:

$$I_4 = \frac{U_{BA}}{R_4} \quad (= 4,5 \text{ A}) \quad (5)$$

Za čvor A , prema (11.6), dobije se:

$$I = I_3 + I_4 \quad (= 8,5 \text{ A}) \quad (6)$$

b) Napon U_{AB} , prema (11.7), jest:

$$U_{AB} = IR_5 - E \quad (7)$$

Budući da je $U_{AB} = -U_{BA}$ dobije se:

$$E = U_{BA} + IR_5 \quad (= 44,5 \text{ V}) \quad (8)$$



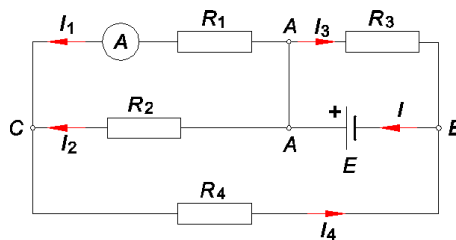
Primjer 11.19.

Ampermetar, sa sheme (slika 1), pokazuje struju jakosti I_1 . Odredite:

- struju u ostalim granama mreže
- elektromotornu silu E .

Podatci: $I_1 = 1 \text{ A}$, $R_1 = 2R_2 = R = 4\Omega$, $R_3 = 2R$, $R_4 = 3R$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) Na shemi sa slike 1 nacrtani su pretpostavljeni smjerovi struja. Iz iste slike vidljivo je da se paralelne grane s otporima R_1 i R_2 nalaze pod istim naponom U_{AC} :

$$U_{AC} = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 \quad (= 2 \text{ A}) \quad (2)$$

Za čvor C , prema I. Kirchhoffovu zakonu (11.6), dobije se:

$$I_4 = I_1 + I_2 \quad (= 3 \text{ A}) \quad (3)$$

b) Elektromotorna sila E jednaka je naponu U_{AB} :

$$U_{AB} = E = U_{AC} + U_{CB} \quad (4)$$

ili

$$E = I_2 R_2 + I_4 R_4 \quad (= 40 \text{ V}) \quad (5)$$

S izračunatom EMS, odnosno naponom U_{AB} slijedi struja I_3 :

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{E}{R_3} \quad (= 5 \text{ A}) \quad (6)$$

Ukupna struja I : $I = I_3 + I_4 = 8 \text{ A}$.

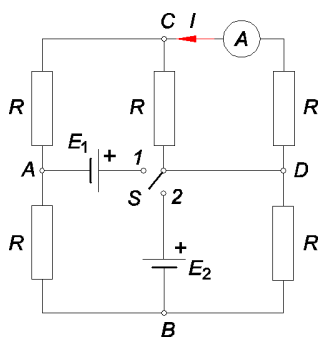


Primjer 11.20.

Ampermetrom, sa sheme sa slike 1, i sklopke S u položaju „1”, teče struja I_1 , dok u položaju „2” teče struja I_2 . Izmjereni odnos struja jest: $I_1 : I_2 = 5 : 3$.

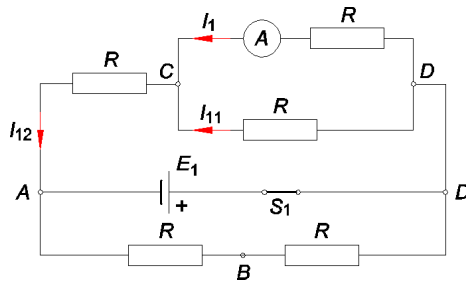
Odredite odnos EMS $E_1 : E_2$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Sklopka S je u položaju „1”. Shema za ovaj položaj sklopke jest:



Sl. 2. Shema ako je sklopka S u položaju 1

Budući da su paralelne grane između čvorova C i D pod istim naponom U_{DC} , a i njihovi otpori su međusobno jednaki, slijedi:

$$I_{11} = I_1 \quad (1)$$

Za čvor C dobije se:

$$I_{12} = I_1 + I_{11} = 2I_1 \quad (2)$$

Razlika potencijala između čvorova D i A jednaka je elektromotornoj sili izvora E_1 :

$$E_1 = U_{DA} = U_{DC} + U_{CA} \quad (3)$$

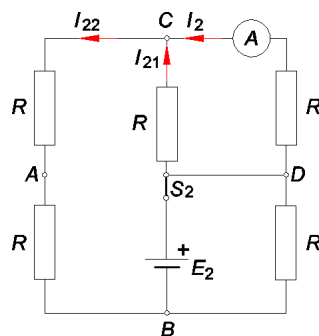
ili

$$E_1 = I_1 R + I_{12} R \quad (4)$$

Uvrštavanjem (2) i (4) dobije se:

$$E_1 = 3RI_1 \quad (5)$$

Sklopka S je u položaju „2“. Shema za ovaj položaj sklopke jest:



Sl. 3. Shema ako je sklopka S u položaju 2

Budući da su paralelne grane između čvorova A i C pod istim naponom U_{AC} , a i njihovi otpori su međusobno jednaki, slijedi:

$$I_{21} = I_2 \quad (6)$$

Za čvor C dobije se:

$$I_{22} = I_{21} + I_2 = 2I_2 \quad (7)$$

Razlika potencijala između čvorova A i B jednaka je elektromotornoj sili izvora E_2 :

$$E_2 = U_{DB} = U_{DC} + U_{CB} \quad (8)$$

ili

$$E_2 = I_{21}R + I_{22}2R \quad (9)$$

Uvrštavanjem (6) i (7) u (9) dobije se:

$$E_2 = 5RI_2 \quad (10)$$

Dijeljenjem (5) i (10) uz zadani omjer struja dobije se:

$$E_1 : E_2 = 1 \quad (11)$$

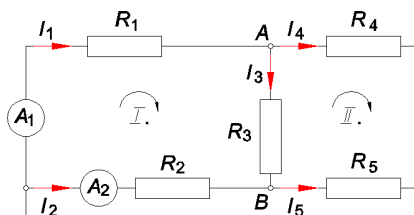


Primjer 11.21.

Odredite nepoznati otpor R_5 dijela električne mreže (slika 1), tako da ampermetri A_1 i A_2 pokazuju upravo struje I_1 i I_2 .

Podatci: $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 7 \text{ A}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = R_4 = 4 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema dijela električne mreže

Određuju se struje u granama 3, 4 i 5 mreže (brojevi grana odgovaraju brojevima otpora). Uporabom II. Kirchhoffova zakona (11.7) za petlje I . i II . dobije se:

$$\text{petlja I.:} \quad I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{petlja II.:} \quad I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = 0 \quad (2)$$

Iz (1) dobije se:

$$I_3 = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{R_3} \quad (= 1,25 \text{ A}) \quad (3)$$

Struje u granama 4 i 5 odredit će se uporabom I. Kirchhoffova zakona **(11.6)** u čvorovima A i B:

$$I_4 = I_1 - I_3 \quad (= 3,75 \text{ A}) \quad (4)$$

$$I_5 = I_2 + I_3 \quad (= 8,25 \text{ A}) \quad (5)$$

Iz (2) dobije se:

$$R_5 = \frac{I_4 R_4 - I_3 R_3}{I_5} \quad (= 1,21 \Omega)$$

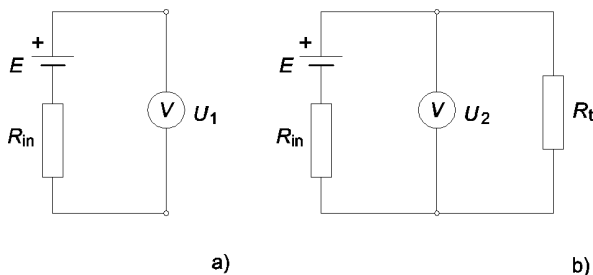
❖ ❖ ❖

Primjer 11.22.

Na neopterećenim stezaljkama naponskog izvora, $R_t \rightarrow \infty$, izmjeren je napon U_1 . Ako se električni izvor optereti trošilom R_t , tada je izmjereni napon na stezaljkama 25% manji. Odredite unutarnji otpor izvora.

Podatci: $U_1 = 24 \text{ V}$, $R_t = 15 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Električni izvor neopterećen a) i opterećen trošilom b)

Ako je naponski izvor neopterećen, tada voltmetar na stezaljkama mjeri EMS izvora:

$$E = U_1 \quad (= 24 \text{ V}) \quad (1)$$

Ako se izvor optereti trošilom R_t , tada se uporabom II. Kirchhoffova zakona (11.7) dobije:

$$E = IR_{in} + IR_t \quad (2)$$

Struja I određena je izmjerenim naponom na trošilu i njegovim otporom:

$$I = \frac{U_2}{R_t} \quad (3)$$

gdje je:

$$U_2 = 0,75U_1 \quad (=18 \text{ V}) \quad (4)$$

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) dobije se:

$$R_{in} = R_t \left(\frac{E}{0,75U_1} - 1 \right) \quad (=5 \Omega) \quad (5)$$

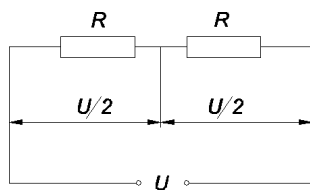


Primjer 11.23.

Dva trošila jednakih nazivnih snaga P_n spojena su u seriju na električni izvor napona $U = U_n$. Odredite snagu ovog spoja.

Podatci: $P_n = 200 \text{ W}$.

Rješenje



Sl. 1. Dva jednaka trošila spojena su serijski

Napon izvora u serijskom spoju dva jednaka trošila u jednakom iznosu raspodijeli se na svakom od trošila (slika 1). Snaga dvaju trošila jednaka je zbroju snaga svakog od trošila. Prema (11.4) dobije se:

$$P_s = \frac{1}{R} \left(\frac{U}{2} \right)^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{U}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

Budući da je $U = U_n$ i $P_n = U_n^2 / R$, (1) postaje:

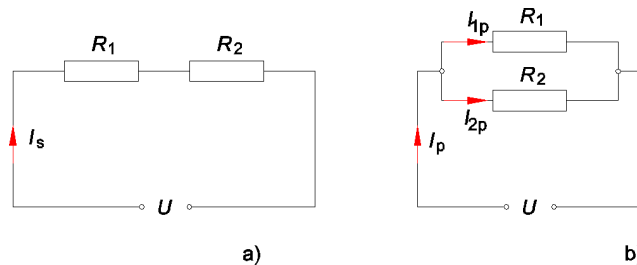
$$P_s = \frac{1}{2} P_n \quad (=100 \text{ W}) \quad (2)$$



Primjer 11.24.

Dva trošila različitih nazivnih snaga spojeni su u jednom slučaju serijski, a u drugom slučaju paralelno (slika 1), na izvor napona $U = U_n$. Ako je omjer snaga trošila u serijskom spoju $P_{1s} : P_{2s} = 4 : 3$ odredite omjer snaga trošila u paralelnom spoju, $P_{1p} : P_{2p}$.

Rješenje



Sl. 1. Serijski a) i paralelni b) spoj dvaju trošila različitih snaga

Iz karakteristike serijskog spoja (kroz sva trošila teče ista struja) i karakteristike paralelnog spoja (sva trošila se nalaze pod istim naponskim prilikama) odredit će se traženi omjer.

Serijski spoj:

$$P_{1s} = I_s^2 R_1 \quad (1)$$

$$P_{2s} = I_s^2 R_2 \quad (2)$$

Omjer snaga jest:

$$\frac{P_{1s}}{P_{2s}} = \frac{R_1}{R_2} \quad \left(= \frac{4}{3} \right) \quad (3)$$

Paralelni spoj:

$$P_{1p} = \frac{U^2}{R_1} \quad (4)$$

$$P_{2p} = \frac{U^2}{R_2} \quad (5)$$

Omjer snaga jest:

$$\frac{P_{1p}}{P_{2p}} = \frac{R_2}{R_1} \quad (= \frac{3}{4}) \quad (6)$$



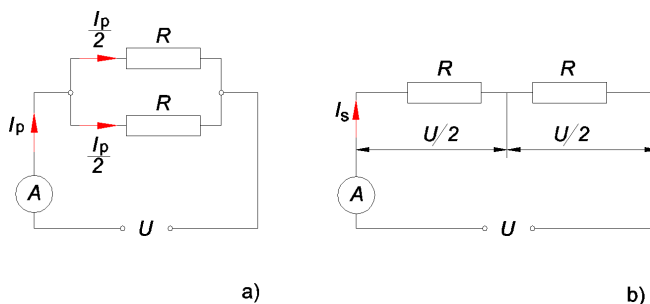
Primjer 11.25.

Dva trošila jednakih nazivnih snaga paralelno su spojena i priključena na naponski izvor napona $U = U_n$. Ako je izmjerena struja izvora I_p u paralelnom spoju trošila, odredite:

- odnos snaga trošila u paralelnom i serijskom spoju
- pokazivanje ampermetra u serijskom spoju.

Podatci: $I_p = 8 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Paralelni a) i serijski b) spoj trošila

a) Karakteristika paralelnog spoja trošila jest da se trošila nalaze pod istim naponom, odnosno da se struja izvora dijeli po trošilima u ovisnosti o njegovu otporu.

Ukupna snaga jednaka je zbroju snaga. Prema (11.4) dobije se:

$$P_p = \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{R} = 2 \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

Karakteristika serijskog spoja trošila jest da svim trošilima teče ista struja, odnosno da se napon izvora raspoređuje po pojedinim trošilima u ovisnosti o njegovu otporu. Budući da postoje dva jednaka trošila, na svakom trošilu je polovica ukupnog napona (slika 1b).

I kod ovog spoja ukupna snaga jednaka je zbroju snaga.

$$P_s = \frac{1}{R} \left(\frac{U}{2}\right)^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{U}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} \quad (2)$$

Kvocijent snaga jest:

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{4}{1} \quad (3)$$

b) Budući da se traži struja izvora serijskog spoja, snaga će se trošiti izraziti pomoću struja:

$$P_p = \left(\frac{I_p}{2}\right)^2 R + \left(\frac{I_p}{2}\right)^2 R = \frac{1}{2} I_p^2 R \quad (4)$$

$$P_s = I_s^2 R + I_s^2 R = 2 I_s^2 R \quad (5)$$

Dijeljenjem (4) sa (5) dobije se:

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{1}{4} \frac{I_p^2}{I_s^2} \quad (6)$$

Uvrštavanjem (3) u (6) dobije se:

$$I_s = \frac{1}{4} I_p \quad (= 2 \text{ A}) \quad (7)$$



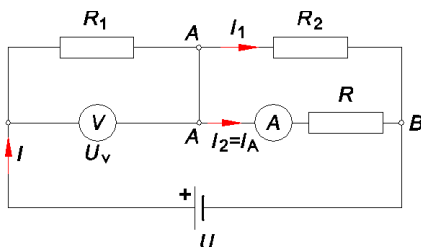
Primjer 11.26.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite:

- napon izvora
- snagu na otporu R .

Podatci: $I_A = 2 \text{ A}$, $U_V = 12 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 3 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema mreže s pretpostavljenim smjerom struje

Budući da je unutarnji otpor voltmetra $R_V \rightarrow \infty$, granom voltmetra ne teče struja.

Struja izvora jednaka je struji kroz otpor R_1 :

$$I = \frac{U_V}{R_1} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (1)$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona (**11.6**) za čvor A određuje se struja I_1 :

$$I_1 = I - I_2 \quad (= 2 \text{ A}) \quad (2)$$

a) Napon izvora jest:

$$U = IR_1 + I_1 R_2 \quad (= 18 \text{ V}) \quad (3)$$

b) Snaga na otporu R , prema (**11.4**), jest:

$$P = I_2^2 R \quad (4)$$

Nepoznati otpor R određuje se iz jednakosti napona na granama između čvorova A i B :

$$I_1 R_2 = I_2 R \quad (5)$$

Traženi otpor jest:

$$R = \frac{I_1}{I_2} R_2 \quad (= 3 \Omega)$$

Tražena snaga, prema (4), jest: $P = 12 \text{ W}$.

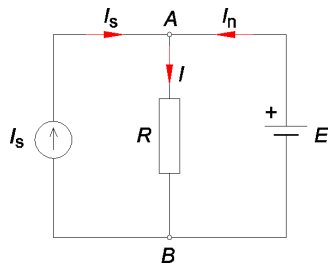


Primjer 11.27.

Idealni naponski i strujni izvor napajaju trošilo otpora R (slika 1). Odredite:

- struju trošila (posebno doprinos svakog od izvora)
- snagu razvijenu na trošilu
- količinu energije što se na trošilu pretvori u toplinsku energiju u vremenu Δt .

Podatci: $I_s = 5 \text{ A}$, $E = 24 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $\Delta t = 20 \text{ min}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

a) Struji trošila pridonose oba izvora: strujni i naponski. Uporabom I. Kirchhoffova zakona (11.6), prema slici 1 i čvora A , dobije se:

$$I = I_s + I_n \quad (1)$$

Razlika potencijala – napon između čvora A i B (slika 1) jednak je elektromotornoj sili naponskog izvora E :

$$U = IR = E \quad (2)$$

Iz (2) dobije se:

$$I = \frac{E}{R} \quad (= 12 \text{ A}) \quad (3)$$

Prema (1) i podacima dobije se:

$$I_s = 5 \text{ A} \quad , \quad I_n = 7 \text{ A}$$

b) Snaga razvijena na trošilu, prema (11.4), jest:

$$P = I^2 R \quad (= 288 \text{ W}) \quad (4)$$

c) Električna energija što se pretvori na trošilu otpora R u toplinsku energiju, prema (11.5), jest:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} P dt = P \Delta t \quad (= 96 \text{ Wh}) \quad (5)$$



Primjer 11.28.

Električno trošilo nazivne snage P priključeno je na napon U . Ako se napon mreže smanji za 5%, za koliko se postotaka smanjila snaga trošila?

Zaokružite točan odgovor: a) 25 %, b) 9,75 %, c) 5 %, d) 9,50 %.

Rješenje

Snaga na trošilu kod nazivnog napona, prema (11.4), jest:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

Snaga na trošilu kod smanjenog napona $U' = 0,95U$ jest:

$$P' = \frac{U'^2}{R} \quad (2)$$

Dijeljenjem (2) s (1) dobije se:

$$P' = \frac{U'^2}{U^2} P \quad (3)$$

Uz zadani odnos napona, prema (3), dobije se:

$$P' = 0,9025P \quad (4)$$

Smanjenje snage (u %) jest:

$$\Delta P = \frac{P' - P}{P} 100 \quad (= -9,75\%) \quad (5)$$

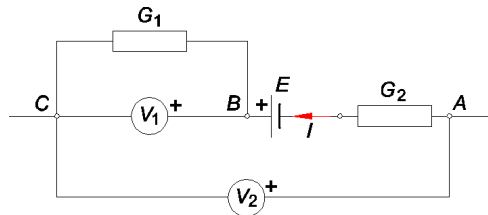
Predznak minus upućuje na smanjenje snage.



Primjer 11.29.

Na slici 1 prikazana je shema dijela električne mreže. Odredite snagu na trošilu vodljivosti G_1 .

Podatci: $E = 48 \text{ V}$, $U_1 = 12 \text{ V}$, $U_2 = 24 \text{ V}$, $G_2 = 0,025 \text{ S}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema dijela mreže

Snaga na trošilu, prema (11.4), jest:

$$P_1 = G_1 U_1^2 \quad (1)$$

Traži se trošilo vodljivosti G_1 .

Za pretpostavljeni smjer struje dobije se:

$$U_{BC} = U_1 = \frac{I}{G_1} \quad (2)$$

$$U_{AC} = U_2 = \frac{I}{G_2} - E + \frac{I}{G_1} \quad (3)$$

Jednadžbe (2) i (3) daju:

$$G_1 = \frac{G_2}{U_1} (E - U_1 + U_2) \quad (= 0,125 \text{ S}) \quad (4)$$

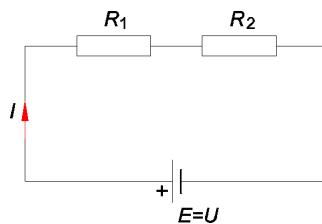
Prema (1) dobije se: $P_1 = 18 \text{ W}$.



Primjer 11.30.

Dva otpornika nazivnih napona U_n i snaga P_1 i P_2 spojeni su serijski i priključeni na napon U . Odredite kolika se snaga (ukupna) razvija na ovom spoju.

Podatci: $U_n = 24\text{ V}$, $U = 30\text{ V}$, $P_1 = 50\text{ W}$, $P_2 = 80\text{ W}$.

Rješenje

Sl. 1. Trošila su spojena serijski

Snaga razvijena na trošilima otpora R_1 i R_2 , prema (11.4), jest:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

gdje je:

U - napon električnog izvora (jednak je EMS),

R - ekvivalentni otpor serijskog spoja dva otpora, prema (15.14) i (15.19).

$$R = R_1 + R_2 \quad (2)$$

Iz nazivnih podataka (napona i struje), prema (11.4), slijede pojedini otpori:

$$R_i = \frac{U_n^2}{P_i} \quad (3)$$

iznosa:

$$R_1 = 11,52\Omega \quad , \quad R_2 = 7,2\Omega$$

Iznos ekvivalentnog otpora (2) jest: $R = 18,72\Omega$.

Razvijena snaga, prema (1), jest: $P = 48,08\text{ W}$.

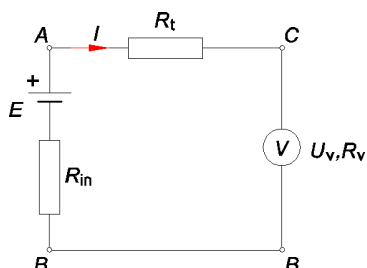


Primjer 11.31.

Trošilo otpora R_t i voltmetar spojeni su na naponski izvor (slika 1). Ako voltmetar, unutarnjeg otpora R_v , pokazuje napon U_v odredite:

- otpor trošila
- snagu razvijenu na trošilu
- razvijenu toplinu na trošilu u vremenu Δt .

Podatci: $E = 6\text{ V}$, $R_{\text{in}} = 2\ \Omega$, $U_v = 4\text{ V}$, $R_v = 1000\ \Omega$, $\Delta t = 60\text{ s}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema spoja

a) Otpor trošila odredit će se uporabom II. Kirchhoffova zakona (11.7):

$$E = I(R_t + R_v + R_{\text{in}}) \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$R_t = \frac{E}{I} - (R_v + R_{\text{in}}) \quad (2)$$

Struja I odredit će se iz pokazivanja voltmetra (pad napona na voltmetru između čvorova C i B):

$$I = \frac{U_v}{R_v} \quad (= 4\text{ mA}) \quad (3)$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobije se: $R_t = 498\ \Omega$.

b) Snaga razvijena na trošilu, prema (11.4), jest:

$$P = I^2 R_t = (7,97\text{ mW}) \quad (5)$$

c) Energija razvijena na trošilu u vremenu Δt , prema (11.5), jest:

$$\Delta Q = P\Delta t \quad (= 478,2 \text{ mWs}) \quad (5)$$

ili

$$\Delta Q = 114,29 \text{ mcal}^*$$



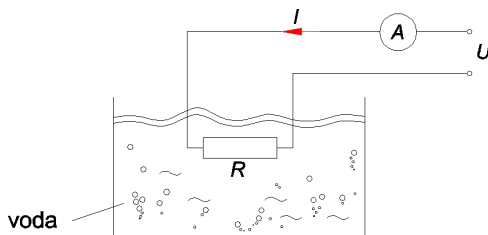
Primjer 11.32.

Grijalica otpora R priključena je na električni izvor napona U i uronjena je u posudu s vodom obujma V i temperature ϑ_0 . Odredite:

- pokazivanje ampermetra
- snagu koja se razvija na trošilu
- energiju oslobođenu na trošilu za vrijeme Δt
- koliko se povisi temperatura vode ako se cijela energija utroši na njezino zagrijavanje.

Podatci: $U = 220 \text{ V}$, $R = 50 \Omega$, $V = 15 \text{ l}$, $\Delta t = 35 \text{ min}$, $c = 4186 \text{ J/kgK}$,
 $\vartheta_0 = 16,5^\circ\text{C}$.

Rješenje



Sl. 1. Grijlač otpora R uronjen je u vodu obujma V

a) Struja, što je pokazuje ampermetar, prema (11.1), jest:

$$I = \frac{U}{R} \quad (= 4,4 \text{ A}) \quad (1)$$

* Vrlo često kao jedinica za toplinu koristi se 1 cal. Pod 1 cal podrazumijeva se količina topline koja je potrebna da se 1 litra vode ugrije od $14,5^\circ\text{C}$ do $15,5^\circ\text{C}$. Joule je eksperimentalno utvrdio da struja jakosti 1 A u otporu 1Ω razvije u 1 s toplinu od 0,239 cal. Slijedi, električni rad od 1 J ekvivalentan je toplini od 0,239 cal.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 0,239 \text{ cal}$$

b) Snaga na trošilu, prema **(11.4)**, jest:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (= 968 \text{ W}) \quad (2)$$

c) Energija oslobođena na trošilu u vremenu Δt , prema **(11.5)**, jest:

$$\Delta Q = P \Delta t \quad (= 2032,8 \text{ kJ}) \quad (3)$$

d) Količina topline koju treba dovesti tijelu mase m da bi mu se temperatura povećala za $\Delta \vartheta$ jest:

$$\Delta Q = mc \Delta \vartheta \quad (4)$$

gdje je:

c specifična toplina, J/kgK,

$\Delta \vartheta$ razlika konačne i početne temperature, °C.

Izjednačavanjem (3) i (4) dobije se:

$$\Delta \vartheta = \frac{P \Delta t}{mc} \quad (= 32,37^\circ \text{C}) \quad (5)$$

Razlika konačne i početne temperature jest:

$$\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_0 \quad (6)$$

Iz (6) dobije se:

$$\vartheta = \Delta \vartheta + \vartheta_0 \quad (= 48,87^\circ \text{C}) \quad (7)$$

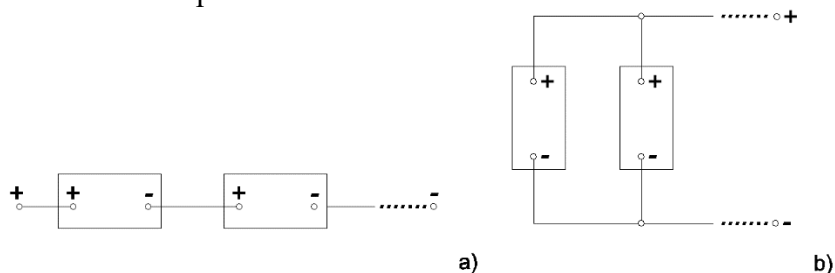


12. REALNI STRUJNI KRUG

Spajanje električnih izvora

Električni izvori mogu se spojiti:

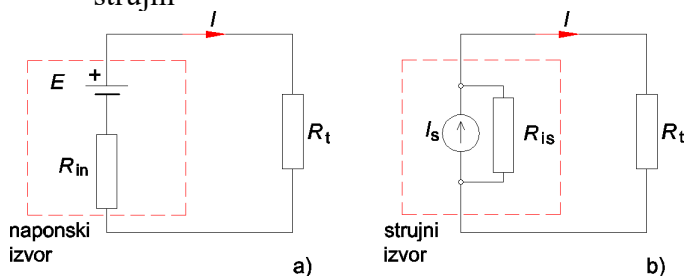
- serijski
- paralelno



Sl. 12.1 Serijski a) i paralelni b) spoj električnih izvora

Električni izvori pri tome mogu biti:

- naponski
- strujni



Sl. 12.2 Naponski a) i strujni b) električni izvor

Svaki naponski (realni) izvor može se zamijeniti strujnim izvorom i obrnuto. Pri tome međusobni odnosi parametara, prema (17.4) i (17.5), jesu:

$$R_{is} = R_{in} \quad (12.1)$$

$$I_s = \frac{E}{R_{in}} \quad (12.2)$$

Snaga električnih izvora

Snaga naponskog, odnosno strujnog izvora, prema (17.12b) i (17.13b), jest:

- naponski izvor: $P = EI$ (12.3)

Snaga naponskog izvora jednaka je umnošku elektromotorne sile izvora i struje koju izvor daje u krug.

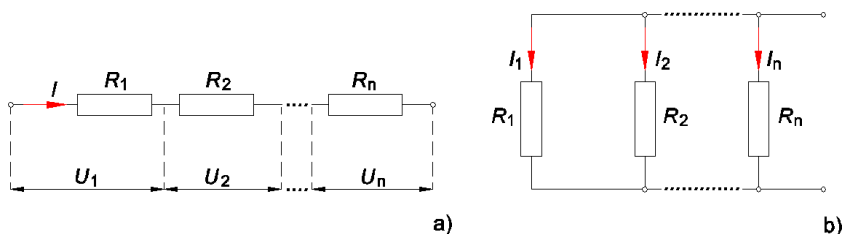
$$\text{- strujni izvor:} \quad P = U I_s \quad (12.4)$$

Snaga strujnog izvora jednaka je umnošku struje strujnog izvora i napona na njegovim stezaljkama.

Spajanje električnih trošila

Električna trošila spajaju se:

- serijski
- paralelno



Sl. 12.3 Serijski a) i paralelni b) spoj trošila

Ekvivalentni otpor navedenih spojeva, prema (15.14) i (15.19), jest:

$$\text{- serijski spoj:} \quad R_e = \sum_k R_k \quad (12.5)$$

$$\text{- paralelni spoj} \quad \frac{1}{R_e} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad (12.6)$$

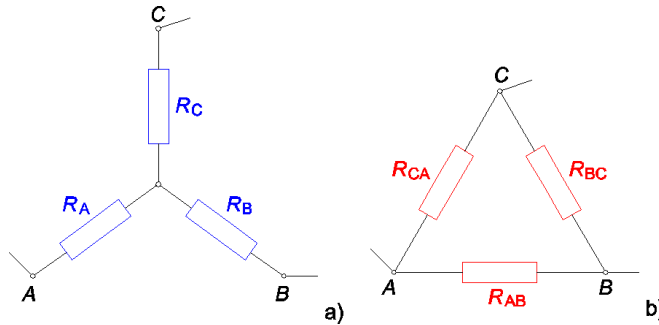
Djelitelj napona i struje, prema (15.15) i (15.24), jest:

$$\text{- djelitelj napona:} \quad U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n \quad (12.7)$$

Razmjer padova napona na pojedinim otporima serijskog spoja odnosi se kao razmjer njihovih vrijednosti.

$$\text{- djelitelj struje:} \quad I_1 : I_2 : \dots : I_n = R_n : R_{n-1} : \dots : R_1 \quad (12.8)$$

Razmjer struja u pojedinim granama paralelnog spoja otpora odnosi se obrnuto proporcionalno razmjeru njihovih vrijednosti.

Zamjena otpora spoja zvijezda spojem otpora u trokut, i obrnuto.

Sl. 12.4 Spoj otpora u zvijezdu a) i trokut b)

Ako su zadani iznosi otpora u spoju zvijezda (Y), tada je npr. otpor R_{AB} u spoju trokut (Δ), prema (17.14):

$$\text{- zamjena } Y \rightarrow \Delta: \quad R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \quad (12.9)$$

Ostali se otpori odrede permutacijom indeksa primjenjujući isto pravilo. Ako su svi otpori spojeni u zvijezdu jednakog iznosa R_Y , za svaki otpor spojen u trokut vrijedi $R_\Delta = 3R_Y$.

Obrnuto, ako su zadani iznosi otpora u spoju trokut (Δ), tada je npr. otpor R_A u spoju zvijezde (Y), prema (17.15):

$$\text{- zamjena } \Delta \rightarrow Y: \quad R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (12.10)$$

Ostali se otpori odrede permutacijom indeksa u brojniku primjenjujući isto pravilo. Ako su svi otpori spojeni u trokut jednakog iznosa R_Δ , za svaki otpor spojen u zvijezdu vrijedi $R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta$.

Volt amperska karakteristika trošila

Kod volt-amperske karakteristike trošila prema slici (15.22)* razlikuju se statički i dinamički otpor. Matematički se opisuju s (15.37) i (15.38).

* Broj slike u udžbeniku II. Sveska.

- *statički otpor*:
$$R_{\text{st}} = \frac{U_0}{I_0} = K_R \operatorname{tg} \alpha_{\text{st}} \quad (12.11)$$

gdje je: K_R - faktor proporcionalnosti (mjerilo otpora),
 α_{st} - kut što ga zatvara linearizirana krivulja u radnoj točki s pozitivnom apcismom osi.

- *dinamički otpor*:
$$R_{\text{d}} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = K_R \operatorname{tg} \alpha_{\text{d}} \quad (12.12)$$

gdje je α_{d} - kut što ga zatvara tangenta u radnoj točki s pozitivnom apcismom osi.

Napomena: Ako je volt-amperska karakteristika dobro nacrtana, $K_R=1$.

Rad i snaga

Rad izvršen u intervalu $[0, T]$ za konstantnu snagu, prema (16.6), jest:

$$A = PT \quad (12.13)$$

Ako snaga u intervalu $[0, T]$ nije konstanta već se mijenja tijekom vremena, tada je rad:

$$A = \int_0^T p \, dt \quad (12.14)$$

Prilagođenje

Trošilo prema slici (16.1) je prilagođeno izvoru ako mu izvor prenese maksimalnu snagu. Ovaj je prijenos moguć ako je, prema (16.15):

$$R_{\text{t}} = R_{\text{in}} \quad (12.15)$$

gdje je R_{in} unutarnji otpor izvora.

Stupanj iskorištenja - jednak je, prema (16.10), kvocijentu korisne W_{k} i uložene W energije:

$$\eta = \frac{W_{\text{k}}}{W} = \frac{W_{\text{k}}}{W_{\text{k}} + W_{\text{g}}} \quad (12.16)$$

gdje je W_{g} energija gubitaka.

Budući da je vremenski interval u svim izrazima za energiju isti, tada je stupanj iskorištenja, prema (16.11):

$$\eta = \frac{P_k}{P_k + P_g} \quad (12.17)$$

Napomena: Ako je struja u strujnom krugu ista za sve parametre strujnog kruga, tada je stupanj iskorištenja:

$$\eta = \frac{R_t}{R_t + R_{in}}$$

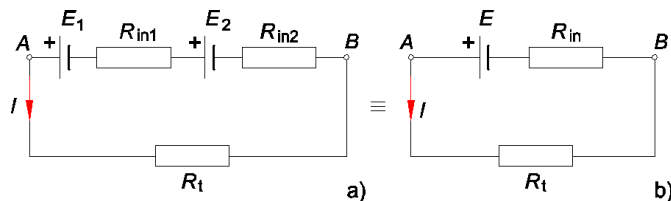
Primjer 12.1.

Za dva naponska izvora serijski spojena odredite:

- ekvivalentni naponski izvor
- snaga izvora.

Podatci: $E_1 = 12\text{ V}$, $E_2 = 24\text{ V}$, $R_{in1} = 1\Omega$, $R_{in2} = 2\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Serijski spoj dva naponska izvora a) i ekvivalentni izvor b)

a) Napon U_{AB} , prema (11.9), jest:

$$U_{AB} = E_1 + E_2 - I(R_{in1} + R_{in2}) \quad (1)$$

ili u obliku:

$$U_{AB} = E - IR_{in} \quad (2)$$

gdje je:

$$E = E_1 + E_2 \quad (= 36\text{ V}) \quad (3)$$

ekvivalentna EMS,

$$R_{in} = R_{in1} + R_{in2} \quad (= 3\Omega) \quad (4)$$

ekvivalentni otpor serijskog spoja dva otpora.

b) Snaga naponskog izvora, prema (12.3), jest:

$$P = EI \quad (5)$$

gdje je: E ekvivalentna elektromotorna sila (3),

$$I = \frac{E}{R} \quad (= 12 \text{ A}) \quad (6)$$

struja ekvivalentnog naponskog izvora kada je on kratko spojen,
 $R_t = 0$.

$$R = R_{\text{in}} + R_t \quad (= 3 \Omega) \quad (7)$$

Uvrštavanjem (3) i (6) u (5) dobije se maksimalna snaga koju izvor daje:

$$P = 432 \text{ W} .$$



Primjer 12.2.

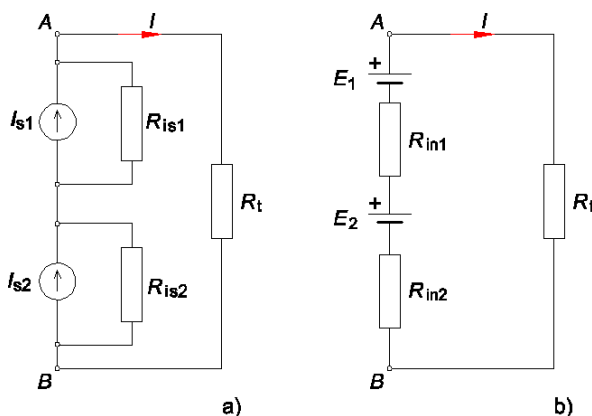
Za dva strujna izvora serijski spojena odredite:

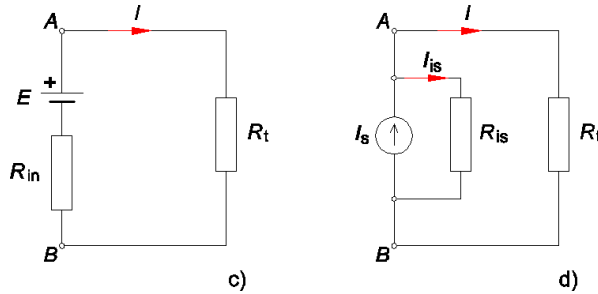
- ekvivalentni strujni izvor
- snagu izvora.

Podatci: $I_{s1} = 4 \text{ A}$, $I_{s2} = 5 \text{ A}$, $R_{is1} = 6 \Omega$, $R_{is2} = 8 \Omega$, $R_t = 2 \Omega$.

Rješenje

a)





Sl. 1. Serijski spoj dva strujna izvora a), zamjena strujnih izvora naponskim b), ekvivalentni naponski izvor c) i ekvivalentni strujni izvor d)

Ekvivalentni strujni izvor dva u seriju spojena strujna izvora (slika 1d) dobije se na način kako je to prikazano postupkom na slici 1.

Parametri naponskih izvora (slika 1b), prema (12.1) i (12.2), jest:

$$E_1 = I_{s1} R_{is1} \quad (= 24 \text{ V}) \quad , \quad R_{in1} = R_{is1} \quad (= 6 \Omega) \quad (1)$$

$$E_2 = I_{s2} R_{is2} \quad (= 40 \text{ V}) \quad , \quad R_{in2} = R_{is2} \quad (= 8 \Omega) \quad (2)$$

Serijski zbroj elektromotornih sila i unutarnjih otpora (slika 1c), jest:

$$E = E_1 + E_2 \quad (= 64 \text{ V}) \quad (3)$$

$$R_{in} = R_{in1} + R_{in2} \quad (= 14 \Omega) \quad (4)$$

Zamjena naponskog izvora strujnim, prema (12.1) i (12.2), daje:

$$I_s = \frac{E}{R_{in}} \quad (= 4,57 \text{ A}) \quad (5)$$

$$R_{is} = R_{in} \quad (= 14 \Omega) \quad (6)$$

b) Snaga strujnog izvora, prema (12.4), jest:

$$P = UI_s \quad (7)$$

gdje je:

$$U = IR_t = I_s R_{is} \quad (8)$$

napon trošila strujnog izvora.

Struja trošila, prema nadomjesnoj shemi sa slike 1d, jest:

$$I = \frac{R_{is}}{R_t + R_{is}} I_s \quad (= 4 \text{ A}) \quad (9)$$

Prema (8) napon trošila jest: $U = 8 \text{ V}$.

Snaga izvora, prema (7), jest: $P = 36,56 \text{ W}$.

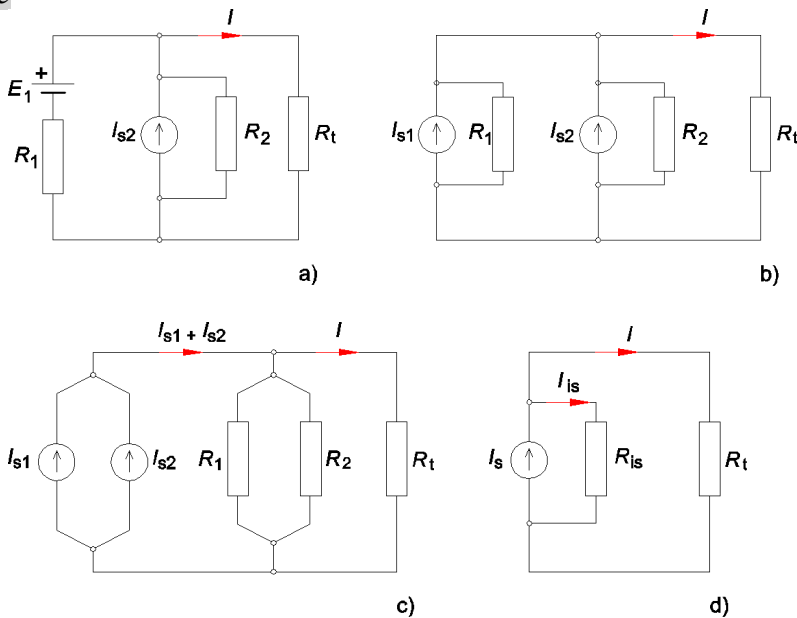


Primjer 12.3.

Trošilo otpora R_t napajaju naponski i strujni izvor (slika 1a). Odredite snagu na trošilu.

Podatci: $E_1 = 24 \text{ V}$, $I_{s2} = 16 \text{ A}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_t = 3 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Paralelni spoj naponskog i strujnog izvora a), naponski izvor zamijenjen je strujnim izvorom b), vidljiviji prikaz paralelnog spoja strujnih izvora c), i ekvivalentni strujni izvor d)

Snaga na trošilu jest:

$$P = I^2 R_t \quad (1)$$

gdje je I struja trošila.

Za odrediti struju trošila nužno je naponski izvor (slika 1a) zamijeniti strujnim (slika 1b). Parametri strujnog izvora, pri zamjeni, prema (12.1) i (12.2), jesu:

$$R_{is1} = R_1 \quad (= 2\Omega) \quad , \quad I_{s1} = \frac{E_1}{R_1} \quad (= 12 \text{ A}) \quad (2)$$

Strujni izvori I_{s1} i I_{s2} daju ukupnu struju nadomjesnog strujnog izvora (slika 1c).

Napomena: Radi jednostavnosti pisanja kod otpora izvora, kada je to god moguće, izostavit će se indeksi: *in* i *is*.

$$I_s = I_{s1} + I_{s2} \quad (= 28 \text{ A}) \quad (3)$$

Unutarnji otpor nadomjesnog izvora, prema (12.6) i slici 1c, jest:

$$R_{is} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 1,5\Omega) \quad (4)$$

Struja trošila, prema slici 1d i (9) primjera 12.2, jest:

$$I = \frac{R_{is}}{R_t + R_{is}} I_s \quad (= 9,33 \text{ A}) \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) u (1) dobije se: $P = 261,33 \text{ W}$.

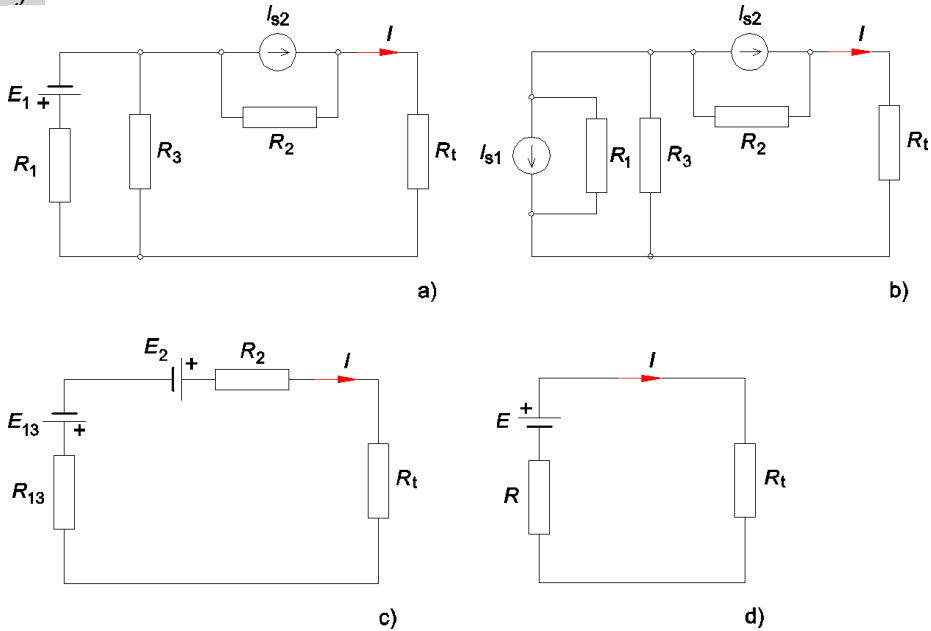


Primjer 12.4.

Trošilo otpora R_t napajaju naponski i strujni izvor (slika 1a). Odredite snagu na trošilu.

Podatci: $E_1 = 30 \text{ V}$, $I_{s2} = 5 \text{ A}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_t = 10\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a), zamjena naponskog izvora strujnim b), zamjena strujnog izvora naponskim c), i ekvivalentni naponski izvor d)

Snaga na trošilu jest:

$$P = I^2 R_t \quad (1)$$

gdje je I struja trošila.

Za odrediti struju trošila nužno je naponski izvor (slika 1a) zamijeniti strujnim (slika 1b). Parametri strujnog izvora, prema (12.1) i (12.2), jesu.

$$I_{s1} = \frac{E_1}{R_1} (= 15 \text{ A}) \quad , \quad R_{is} = R_1 (= 2 \Omega) \quad (2)$$

Otpori R_1 i R_3 su u paralelnom spoju:

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} (= 1,2 \Omega) \quad (3)$$

Strujni izvor I_{s1} s ukupnim unutarnjim otporom R_{13} zamjenjuje se, prema (12.1) i (12.2), naponskim izvorom, a isto tako i strujni izvor I_{s2} s unutarnjim otporom R_2 (slika 1b i 1c).

$$E_{13} = I_{s1} R_{13} \quad (= 18 \text{ V}) \quad (4)$$

Unutarnji otpor R_{13} naponskog izvora E_{13} je sačuvan.

$$E_2 = I_{s2} R_2 \quad (= 25 \text{ V}) \quad (5)$$

Unutarnji otpor R_2 naponskog izvora E_2 je sačuvan.

Prema nadomjesnoj shemi (slika 1c) naponski izvori su u protuspoju:

$$E = E_2 - E_{13} \quad (= 7 \text{ V}) \quad (6)$$

$$R = R_{13} + R_2 \quad (= 6,2 \Omega) \quad (7)$$

Struja trošila, prema slici 1d, jest:

$$I = \frac{E}{R + R_t} \quad (= 0,43 \text{ A}) \quad (8)$$

Uvrštavanjem (8) u (1) dobije se: $P = 1,85 \text{ W}$.

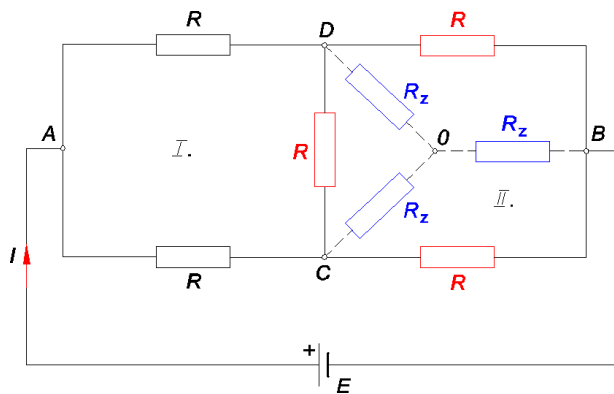


Primjer 12.5.

Za shemu prema slici 1 odredite struju izvora.

Podatci: $R = 3 \Omega$, $E = 15 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Struja izvora prema Ohmovu zakonu, jest:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (1)$$

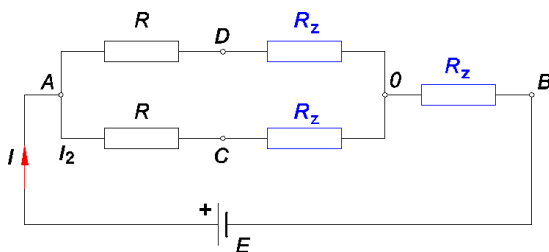
gdje je R_e ekvivalentni otpor električne mreže.

Za odrediti ekvivalentni otpor R_e nužno je otpore u spoju trokut, petlja *I.* ili petlja *II.*, nadomjestiti u spoju zvijezda.

Za zadane otpore u spoju trokut *BCD*, petlja *II.*, otpori u spoju zvijezda *BCDO*, prema (12.10), jesu:

$$R_z = \frac{RR}{R+R+R} \quad (= \frac{1}{3}R) \quad (2)$$

Napomena: Isti zadatak riješiti tako da se zvijezda otpora *ABCD* zamijeni trokutom otpora *ABC* prema (12.9).



Sl. 2. Nadomjesna shema sa slike 1 nakon zamjene otpora u spoju trokut s otporima u spoju zvijezda

Ekvivalentni otpor, prema slici 2, jest mješoviti spoj:

$$R_e = \frac{(R+R_z)(R+R_z)}{(R+R_z)+(R+R_z)} + R_z \quad (3)$$

Uvrštavanjem (2) u (3) dobije se: $R_e = R = 3\Omega$.

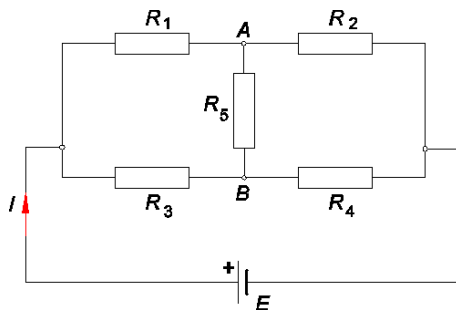
Struja izvora, prema 1, jest: $I = 5\text{ A}$.



Primjer 12.6.

Za shemu prema slici 1 odredite snagu izvora.

Podatci: $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 10\Omega$, $E = 10\text{ V}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Snaga naponskog izvora, prema (12.3), jest:

$$P = EI \quad (1)$$

gdje je:

E - elektromotorna sila naponskog izvora,

I - struja naponskog izvora.

Struja izvora prema Ohmovu zakonu, (11.1), jest:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (2)$$

gdje je R_e ekvivalentni otpor električne mreže.

Budući da je:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (= 12\Omega) \quad (3)$$

čvorovi A i B su na istom potencijalu (most je uravnotežen, v.P 15.5 I. Sveska) pa otporom R_5 ne teče struja, otpor R_5 je beskonačan. Slijedi ekvivalentni otpor:

$$R_e = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (= 3,33\Omega) \quad (4)$$

Prema (2) dobije se: $I = 3 \text{ A}$.

Snaga naponskog izvora, prema (1), jest: $P = 30 \text{ W}$.

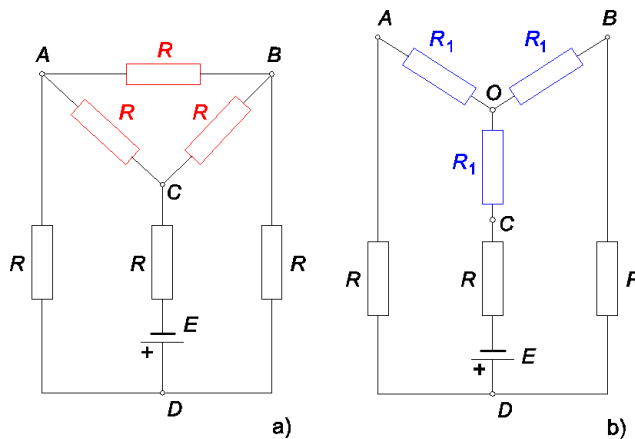


Primjer 12.7.

Odredite ekvivalentni otpor sheme električne mreže prema slici 1a.

Podatci: $R = 4 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena spoja otpora u trokutu sa spojem otpora u zvijezdu b)

Za odrediti ekvivalentni otpor električne mreže nužno je spoj otpora u trokutu (vrhovi trokuta ABC) (slika 1a), zamijeniti sa spojem otpora u zvijezdu $ABCO$ (slika 1b). Iznos otpora u spoju zvijezda, prema (12.10), jest:

$$R_1 = \frac{RR}{R + R + R} \quad \left(= \frac{R}{3} \right) \quad (1)$$

Otpor grane OAD jednak je otporu grane OBD .

$$R_{OAD} = R_{OBD} \quad \left(= \frac{4}{3} R \right) \quad (2)$$

Grane OAD i OBD međusobno su paralelne grane. Njihov ekvivalentni otpor, prema (12.6), jest:

$$R_{OD} = \frac{1}{2} R_{OAD} \quad (= \frac{2}{3} R) \quad (3)$$

Ekvivalentni otpor mreže jest serijski spoj tri otpora:

$$R_{ek} = R_{OD} + R_1 + R \quad (= 2R = 8\Omega) \quad (4)$$

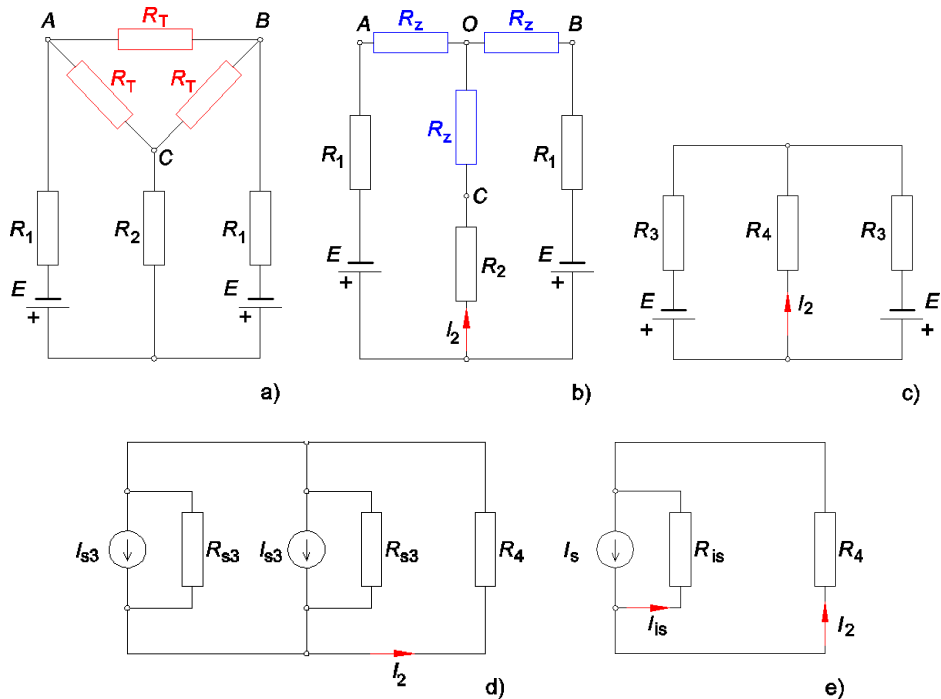


Primjer 12.8.

Odredite struju kroz otpor R_2 električne mreže prema slici 1a.

Podatci: $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = R_T = 2\Omega$, $E = 24\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i postupak rješavanja b), c), d) i e)

Dio električne mreže (slika 1a), spoj otpora u trokut ABC zamjenjuje se sa spojem otpora u zvijezdu $ABCO$. Prema (12.10) dobije se:

$$R_Z = \frac{R_T}{3} \quad (1)$$

Serijski spoj otpora u paralelnim granama (slika 1b) zamjenjuje se ekvivalentnim otporom (slika 1c).

$$R_3 = R_1 + R_z \quad , \quad R_4 = R_2 + R_z \quad (2)$$

Naponski izvori (slika 1c) zamjenjuju se strujnim izvorima (slika 1d). Prema (12.1) i (12.2) dobije se:

$$R_{s3} = R_3 \quad , \quad I_{s3} = \frac{E}{R_3} \quad (3)$$

Paralelni spoj strujnih izvora (slika 1d) daje ekvivalentni strujni izvor (slika 1e):

$$I_s = 2I_{s3} \quad , \quad R_{is} = \frac{1}{2}R_{s3} \quad (4)$$

Struja I_2 , prema slici 1e, jest:

$$I_2 = \frac{R_{is}}{R_4 + R_{is}} I_s \quad (5)$$

Uvrštavanjem (1) do (4) u (5) dobije se:

$$I_2 = \frac{2E}{R_1 + 2R_2 + R_T} \quad (= 5,33 \text{ A}) \quad (6)$$

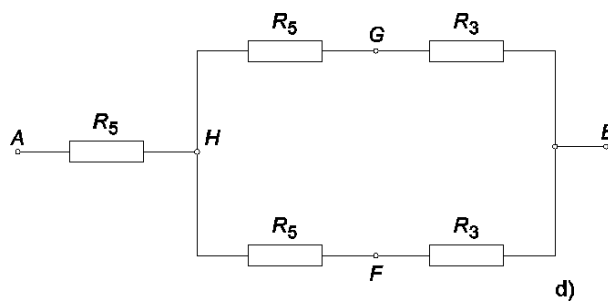
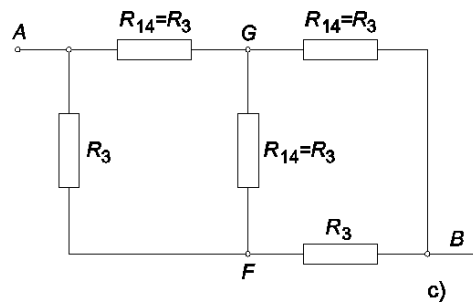
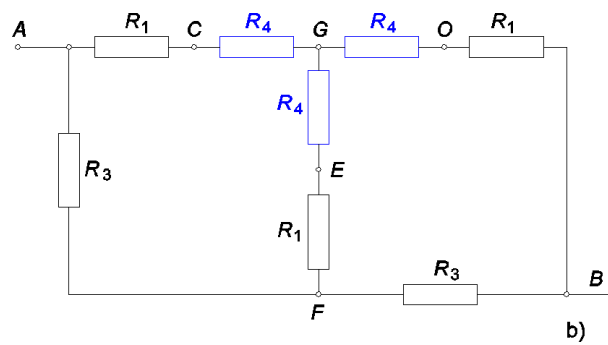
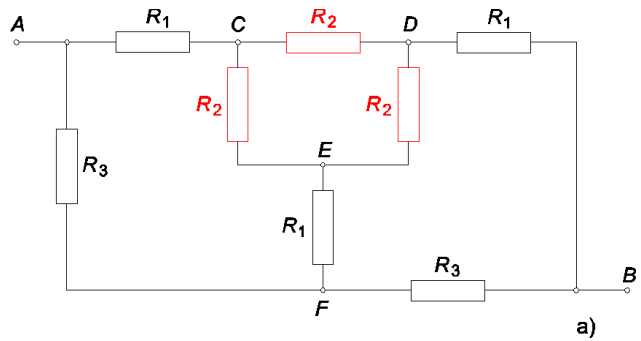


Primjer 12.9.

Odredite ekvivalentni otpor R_e između čvorova A i B na shemi električne mreže (slika 1a).

Podatci: $R_1 = 14\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 18\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a), zamjena trokuta otpora otporima u zvijezdu b), serijski spoj otpora pojedinih grana c), zamjena trokuta otpora otporima u zvijezdu d)

Trokut otpora CDE (slika 1a) zamjenjuje se zvijezdom otpora CDE (slika 1b).

Otpori zamjene, prema (12.10), jesu:

$$R_4 = \frac{R_2 R_2}{R_2 + R_2 + R_2} \quad (= \frac{1}{3} R_2 = 4\Omega) \quad (1)$$

Ekvivalentni otpori serijskog spoja po granama AG , GB i GF jednaki su i iznose:

$$R_{14} = R_1 + R_4 \quad (= 18\Omega) \quad (2)$$

Prema zadanim podatcima slijedi $R_{14} = R_3$.

Trokut otpora AGF (slika 1c) zamjenjuje se zvijezdom otpora AGF (slika 1d).

$$R_5 = \frac{R_3 R_3}{R_3 + R_3 + R_3} \quad (= \frac{1}{3} R_3 = 6\Omega) \quad (3)$$

Ekvivalentni otpor AB jest mješoviti spoj otpora:

$$R_e = R_5 + \frac{(R_3 + R_5)(R_3 + R_5)}{R_3 + R_5 + R_3 + R_5} \quad (= 18\Omega) \quad (4)$$

Iz slike 1c također je vidljivo da je dobiveni most u ravnoteži pa slijedi:

$$R_e = \frac{2R_3 2R_3}{2R_3 + 2R_3} \quad (= R_3 = 18\Omega) \quad (5)$$

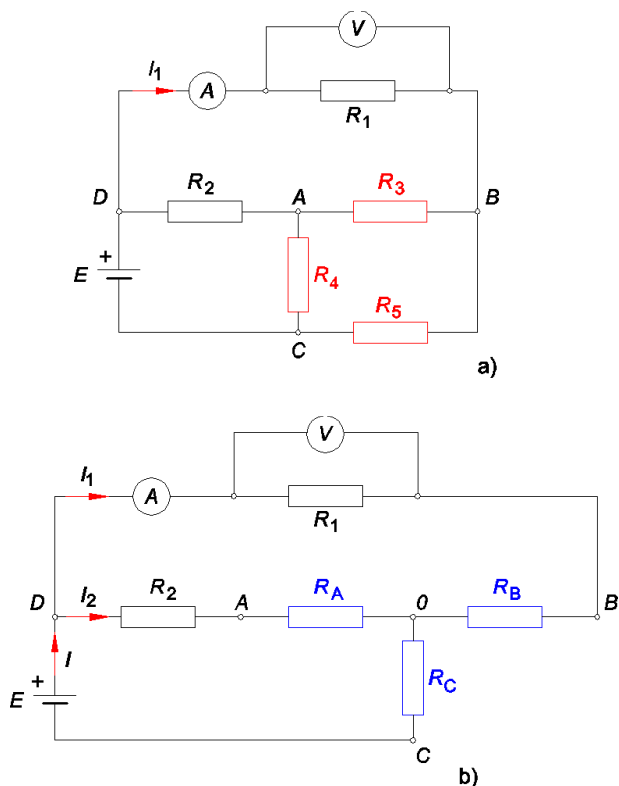


Primjer 12.10.

Odredite pokazivanje idealnog ampermetra i voltmetra u shemi električne mreže prikazane na slici 1a.

Podatci: $R_1 = R_2 = 3\Omega$, $R_3 = R_5 = 10\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, $E = 24V$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena trokuta otpora otporima u zvijezdu b)

Idealni voltmetar pokazuje pad napona na otporu R_1 :

$$U = R_1 I_1 \quad (1)$$

gdje je I_1 struja ampermetra.

Za riješiti električnu mrežu nužno je odrediti struju izvora za što je potrebno trokut otpora ABC zamijeniti zvijezdom otpora ABC (slika 1b).

Otpori u spoju zvijezda, prema **(12.10)**, jesu:

$$R_A = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} \quad (= 2\Omega) \quad (2)$$

Jednakim postupkom dobije se:

$$R_B = 4\Omega \quad , \quad R_C = 2\Omega$$

Prema nadomjesnoj shemi na slici 1b dobije se:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (3)$$

gdje je:

$$R_e = R_C + \frac{(R_1 + R_B)(R_2 + R_A)}{R_1 + R_B + R_2 + R_A} \quad (= 4,92 \Omega) \quad (4)$$

Prema (3) dobije se: $I = 4,88 \text{ A}$.

Iz slike 1b uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor D i djelitelja struje (12.8) dobije se:

$$I_1 = I - I_2 \quad (5)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1 + R_B}{R_2 + R_A} \quad (6)$$

Sustav (5) i (6) daje:

$$I_1 = \frac{R_2 + R_A}{R_1 + R_2 + R_A + R_B} I \quad (= 2,03 \text{ A}) \quad (7)$$

Pokazivanje voltmetra, prema (1), jest: $U = 6,09 \text{ V}$.



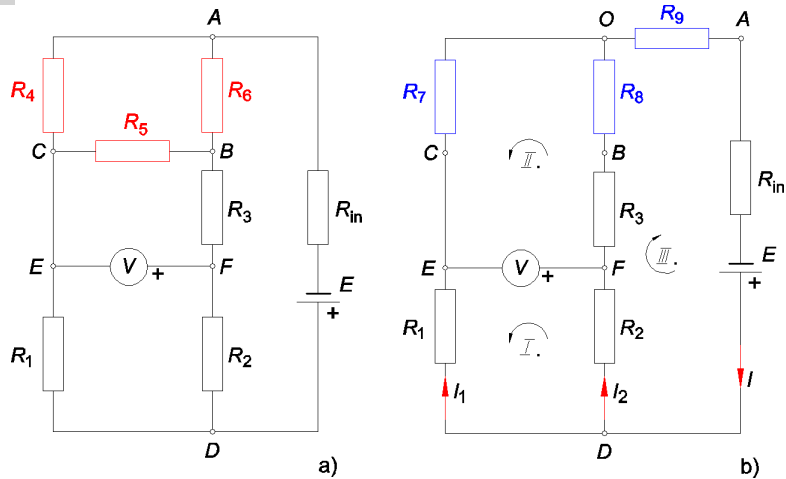
Primjer 12.11.

Odredite snagu na otporu R_2 sa sheme prikazane na slici 1a.

Podatci: $R_1 = 20 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_5 = 60 \Omega$, $R_6 = 90 \Omega$, $R_{in} = 5 \Omega$,

$E = 110 \text{ V}$, $U_V = U_{FE} = 0 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena trokuta otpora ABC zvijezdom otpora b)

Snaga na otporu R_2 jest:

$$P_2 = I_2^2 R_2 \quad (1)$$

gdje su nepoznanice i struja i otpor.

Za odrediti otpor R_2 odnosno struju I_2 nužno je zamijeniti trokut otpora ABC (slika 1a) sa zvijezdom otpora $ABCO$ (slika 1b).

Prema (12.10) dobije se:

$$R_7 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (= 10\Omega)$$

Jednakim postupkom dobiju se i preostala dva zamjenska otpora:

$$R_8 = 30\Omega \quad , \quad R_9 = 15\Omega$$

Iznos otpora R_2 dobije se uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlje I . i II .

$$\text{petlja } I.: \quad U_V - I_1 R_1 + I_2 R_2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{petlja } II.: \quad U_V - I_1 R_7 + I_2 (R_3 + R_8) = 0 \quad (3)$$

Sustav (2) i (3) uz $U_V = 0$ daje:

$$R_2 = \frac{(R_3 + R_8)R_1}{R_7} \quad (= 80 \Omega)$$

Struja I_2 određuje se uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor D i II. Kirchhoffova zakona za petlju III . (slika 1b):

$$\text{čvor } D: \quad I = I_1 + I_2 \quad (4)$$

$$\text{petlja } III.: \quad E = (R_{in} + R_9)I + (R_2 + R_3 + R_8)I_2 \quad (5)$$

Sustav jednažbi (2), (4) i (5) daje:

$$I_2 = \frac{R_1 E}{(R_1 + R_2)(R_{in} + R_9) + (R_2 + R_3 + R_8)R_1} \quad (= 0,5 \text{ A}) \quad (6)$$

Snaga, prema (1), jest: $P_2 = 20 \text{ W}$.

Napomena: Budući da je $U_V = 0$ most je u ravnoteži (v. P15.5 II. Sveska) pa slijedi $R_1(R_3 + R_8) = R_2R_7$ iz čega izravno slijedi traženi otpor R_2 .

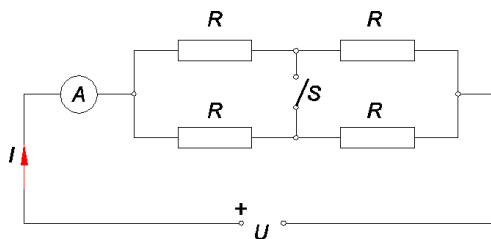


Primjer 12.12.

Četiri otpornika svaki iznosa R , u mješovitom spoju (slika 1), priključeni su na električni izvor konstantnog napona U . Kod otvorene sklopke S ampermetrom teče struja jakosti I . Odredite jakost struje prije i poslije zatvaranja sklopke S .

Podatci: $U = 24 \text{ V}$, $R = 6 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Četiri otpora u mješovitom spoju priključena su na naponski izvor

Sklopka S je otvorena. Ako je sklopka S otvorena, struja izvora (struja kroz ampermetar) jest:

$$I = \frac{U}{R_e} \quad (1)$$

gdje je:

$$R_e = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} \quad (= R) \quad (2)$$

ekvivalentni otpor mješovitog spoja.

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se: $I = 4 \text{ A}$.

Sklopka S je zatvorena. Ako je sklopka S zatvorena, tada je ekvivalentni otpor.

$$R_e = \frac{RR}{R+R} + \frac{RR}{R+R} \quad (= R) \quad (3)$$

Ekvivalentni otpor (3) jednak je ekvivalentnom otporu (2) pa slijedi: bilo da je sklopka S otvorena ili zatvorena, struja kroz ampermetar jednakog je iznosa.

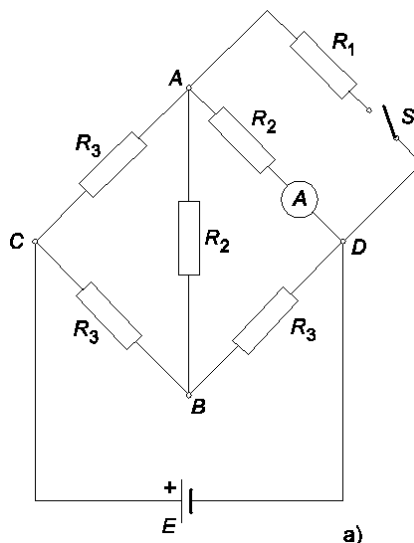


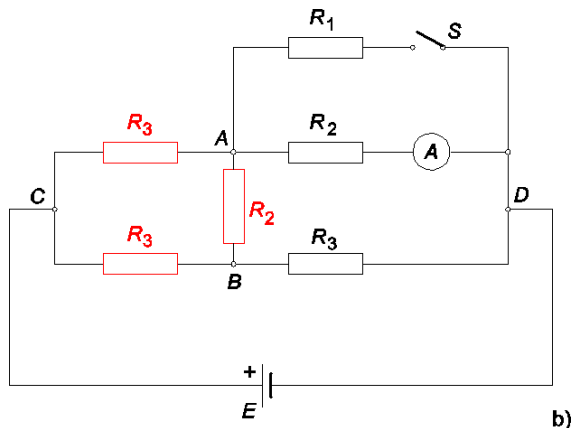
Primjer 12.13.

Odredite pokazivanje ampermetra prije i nakon zatvaranja sklopke S na električnoj shemi (slika 1a).

Podatci: $E = 24 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$.

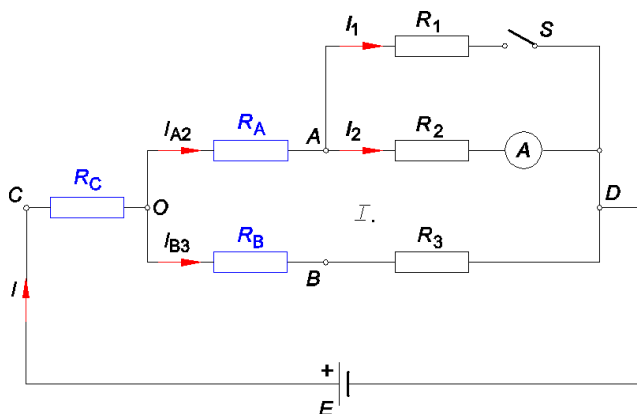
Rješenje





Sl. 1. Shema električne mreže a) i njezin drugačiji prikaz b)

Za odrediti struju koja teče kroz ampermetar, bilo da je sklopka S otvorena ili zatvorena, nužno je trokut otpora ABC zamijeniti zvijezdom otpora $ABCO$ (slika 2).



Sl. 2. Trokut otpora ABC zamijenjen je zvijezdom otpora ABC

Otpori spoja zvijezde, prema (12.10), jesu:

$$R_A = R_B = 1,43\Omega \quad , \quad R_C = 1,79\Omega$$

a) Sklopka S je otvorena. Ako je sklopka S otvorena, otporom R_1 ne teče struja I_1 (slika 2), dok je struja ampermetra $I_2 = I_{A2}$.

Djelitelj struje (12.8), za petlju I , daje:

$$I_{A2} = I_{B3} \frac{R_{B3}}{R_{A2}} \quad (1)$$

gdje su:

$$R_{A2} = R_A + R_2 \quad (= 5,43 \Omega)$$

$$R_{B3} = R_B + R_3 \quad (= 6,43 \Omega)$$

serijski otpori u paralelnim granama.

Za čvor O dobije se uporabom I. Kirchhoffova zakona:

$$I = I_{A2} + I_{B3} \quad (2)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (= 5,07 \text{ A}) \quad (3)$$

struja izvora,

$$R_e = R_C + \frac{R_{A2}R_{B3}}{R_{A2} + R_{B3}} \quad (= 4,73 \Omega) \quad (4)$$

ekvivalentni otpor električne mreže.

Iz (1) i (2) dobije se:

$$I_{A2} = \frac{R_{B3}}{R_{A2} + R_{B3}} I \quad (= 2,75 \text{ A}) \quad (5)$$

b) Sklopka S je zatvorena. Ako je sklopka S zatvorena, otporom R_2 teče struja ampermetra (slika 2), (koristite jednadžbu djelitelja struje **(12.8)**):

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 \quad (6)$$

I. Kirchhoffov zakon za čvorove A i O daje:

$$I_{A2} = I_1 + I_2 \quad (7)$$

$$I = I_{A2} + I_{B3} \quad (8)$$

gdje je:

$$\frac{I_{A2}}{I_{B3}} = \frac{R_B + R_3}{R_A + R_{12}} \quad (= 2,05) \quad (9)$$

odnos struja u paralelnim granama,

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 1,71 \Omega) \quad (10)$$

otpor paralelnog spoja,

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (= 6,15 \text{ A}) \quad (11)$$

struja izvora,

$$R_e = R_C + \frac{(R_A + R_{12})(R_B + R_3)}{R_A + R_{12} + R_B + R_3} \quad (= 3,9 \Omega) \quad (12)$$

ekvivalentni otpor električne mreže.

Jednadžbe (7), (8), (9) i (11) sa (6) daju:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_B + R_3}{R_A + R_{12} + R_B + R_3} \frac{E}{R_e} \quad (= 1,77 \text{ A}) \quad (13)$$



Primjer 12.14.

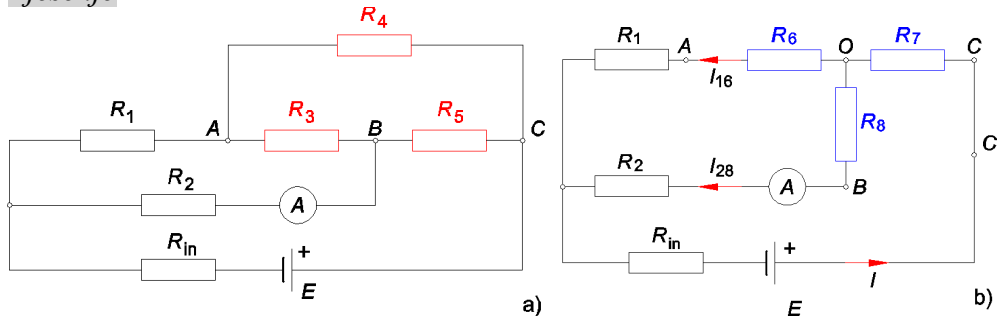
Zadana je shema električne mreže (slika 1a). Odredite:

- a) snagu izvora
- b) pokazivanje ampermetra.

Podatci: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = R_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$, $E = 24 \text{ V}$,

$R_{in} = 1,5 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema mreže a) i zamjena trokuta otpora ABC zvijezdom otpora ABCO b)

a) Snaga izvora

Prema Joulovu zakonu snaga jest:

$$P = I^2 R_e = \frac{E^2}{R_e} \quad (1)$$

gdje je R_e ekvivalentni otpor električne mreže.

Za odrediti ekvivalentni otpor nužno je trokut otpora ABC (slika 1a) zamijeniti zvijezdom otpora ABCO (slika 1b). Prema (12.10) dobije se:

$$R_6 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} \quad (= 1,56 \Omega) \quad (2)$$

Jednakim postupkom dobije se:

$$R_7 = 1,88 \Omega \quad , \quad R_8 = 1,88 \Omega$$

Ekvivalentni otpor jest:

$$R_e = R_{in} + R_7 + \frac{(R_1 + R_6)(R_2 + R_8)}{R_1 + R_6 + R_2 + R_8} \quad (= 5,95 \Omega) \quad (3)$$

Snaga izvora, prema (1), jest: $P = 96,81 \text{ W}$.

b) Pokazivanje ampermetra

Prema oznakama na slici 1b i uporabe izraza za djelitelj struje (12.8) dobije se:

$$I_A = I_{28} = \frac{R_1 + R_6}{R_2 + R_8} I_{16} \quad (4)$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor O dobije se:

$$I = I_{16} + I_A \quad (5)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (= 4,03 \text{ A}) \quad (6)$$

struja izvora.

Uvrštavanjem (5) u (4) uz (6) dobije se:

$$I_A = \frac{R_1 + R_6}{R_1 + R_6 + R_2 + R_8} I \quad (= 1,76 \text{ A}) \quad (7)$$



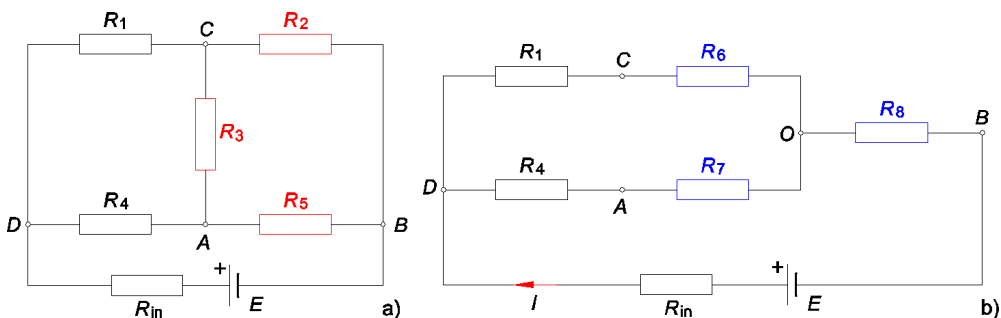
Primjer 12.15.

Zadana je shema električne mreže (slika 1a). Odredite snagu izvora.

Podatci: $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = R_4 = 20\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_5 = 15\Omega$, $E = 110\text{ V}$,

$R_{in} = 1\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena trokuta otpora ABC sa zvijezdom otpora ABCO

Snaga izvora, prema Joulovu zakonu, jest:

$$P = I^2 R_e = \frac{E^2}{R_e} \quad (1)$$

gdje je R_e ekvivalentni otpor električne mreže.

Za odrediti struju izvora, odnosno ekvivalentni otpor mreže nužno je trokut otpora ABC (slika 1a) zamijeniti zvijezdom otpora $ABCO$ (slika 1b).

Prema (12.10) dobije se:

$$R_8 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_5} \quad (= 6,66 \Omega) \quad (2)$$

Jednakim postupkom dobije se:

$$R_7 = 3,33 \Omega \quad , \quad R_6 = 4,44 \Omega$$

Ekvivalentni otpor električne mreže, prema slici 1b, jest:

$$R_e = R_{in} + R_8 + \frac{(R_1 + R_6)(R_4 + R_7)}{R_1 + R_6 + R_4 + R_7} \quad (= 21,57 \Omega) \quad (3)$$

Snaga, prema (1), jest: $P = 560,96 \text{ W}$.

Napomena: Isti zadatak riješiti tako da se zvijezda otpora $BCDA$ zamijeni trokutom otpora BCD , prema (12.9).

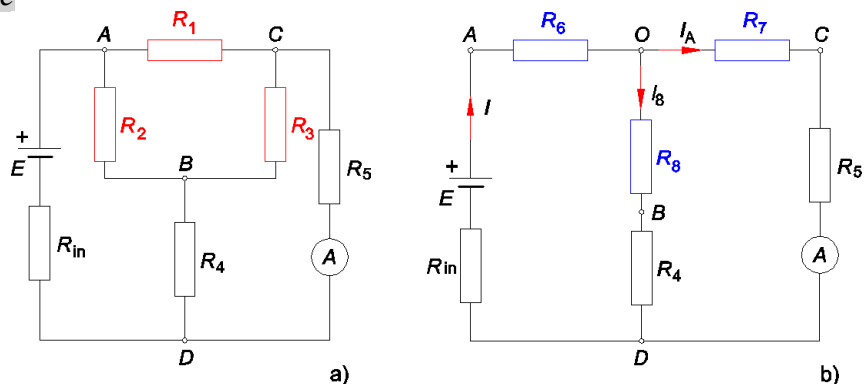


Primjer 12.16.

Izračunajte struju koju mjeri ampermetar u električnoj mreži, (slika 1a).

Podatci: $R_3 = 3R_1 = 2R_2 = 12 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_A = 0,1 \Omega$, $R_{in} = 1 \Omega$, $E = 24 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena trokuta otpora ABC sa zvijezdom otpora $ABCO$ b)

Za odrediti struju koja teče ampermetrom nužno je zamijeniti trokut otpora ABC (slika 1a) sa zvijezdom otpora $ABCO$ (slika 1b).

Prema (12.10) dobije se:

$$R_6 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (= 1,09 \Omega) \quad (1)$$

Jednakim postupkom dobije se:

$$R_7 = 2,18 \Omega \quad , \quad R_8 = 3,28 \Omega$$

Uporabom djelitelja struje, (12.8), dobije se:

$$I_A = \frac{R_4 + R_8}{R_A + R_5 + R_7} I_8 \quad (= I_8) \quad (2)$$

gdje je:

$$I_8 = I - I_A \quad (3)$$

struja poprečne grane prema slici 1b,

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (= 4,18 \text{ A}) \quad (4)$$

struja izvora,

$$R_e = (R_{in} + R_6) + \frac{(R_4 + R_8) \cdot (R_A + R_5 + R_7)}{R_4 + R_8 + R_A + R_5 + R_7} \quad (= 5,73 \Omega)$$

ekvivalentni otpor mreže.

Iz (2) i (3) dobije se: $I_A = I / 2 = 2,09 \text{ A}$.

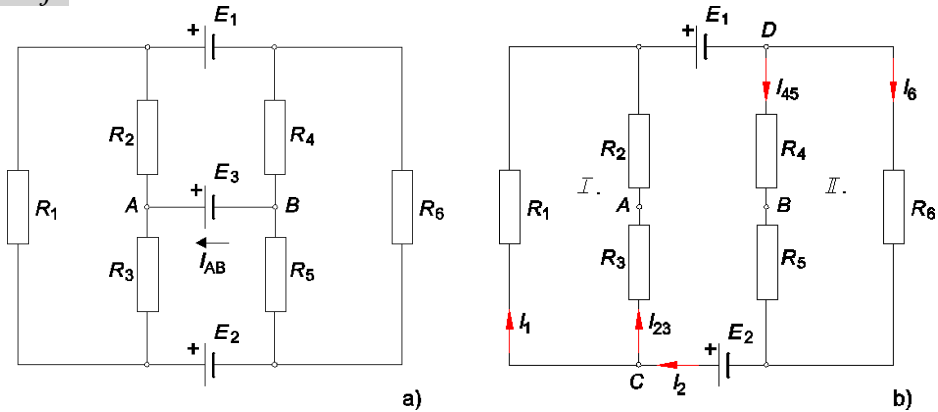
Napomena: Isti zadatak riješiti tako da se zvijezda otpora $ACDB$ zamijeni trokutom otpora ACD , prema (12.9).



Primjer 12.17.

Za shemu električne mreže (slika 1a) odredite elektromotornu silu E_3 tako da struja I_{AB} bude jednaka nuli.

Podatci: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 15\text{ V}$, $R_1 = R_6 = 2\Omega$, $R_2 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $R_3 = 5\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Ako struja ne teče u grani AB (slika 1a), tada shema poprima izgled prema slici 1b. Prema oznakama na slici 1b napon U_{AB} jest:

$$U_{AB} = -I_{45}R_5 + E_2 - I_{23}R_3 \quad (1a)$$

ili u obliku:
$$U_{AB} = I_{32}R_2 + E_1 + I_{45}R_4 \quad (1b)$$

Napomena: Od točke A do točke B može se ići bilo kojim putem.

Uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvorove C i D te djelitelja struje (12.8) dobije se:

$$\text{čvor } C: \quad I_2 = I_{23} + I_1 \quad (2)$$

$$\text{čvor } D: \quad I_2 = I_{45} + I_6 \quad (3)$$

$$\text{petlja } I.: \quad I_1 : I_{23} = (R_2 + R_3) : R_1 \quad (4)$$

$$\text{petlja } II.: \quad I_6 : I_{45} = (R_4 + R_5) : R_6 \quad (5)$$

Određuje se struja I_2 :

$$I_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_{\text{ek}}} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (6)$$

gdje je:

$$R_{\text{ek}} = R_{e1} + R_{e2} \quad (= 2,5 \Omega) \quad (7)$$

ekvivalentni otpor mreže,

$$R_{e1} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (= 1,5 \Omega) \quad (8)$$

$$R_{e2} = \frac{R_6(R_4 + R_5)}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (= 1 \Omega) \quad (9)$$

prikrate paralelnih spojeva.

Iz (2) i (4) dobije se:

$$I_{23} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} I_2 \quad (= 0,5 \text{ A}) \quad (10)$$

Iz (3) i (5) dobije se:

$$I_{45} = \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6} I_2 \quad (= 1 \text{ A}) \quad (11)$$

Prema (1) dobije se: $U_{\text{AB}} = E_3 = 11,5 \text{ V}$.



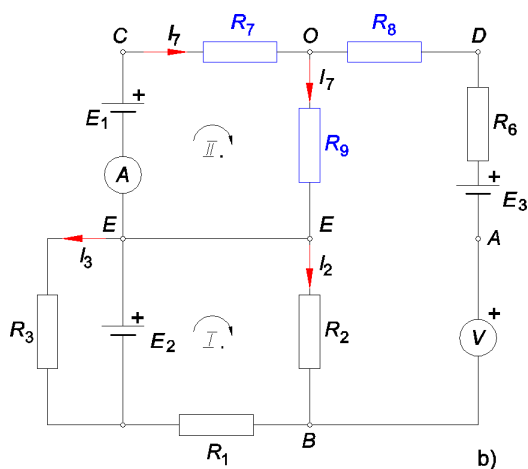
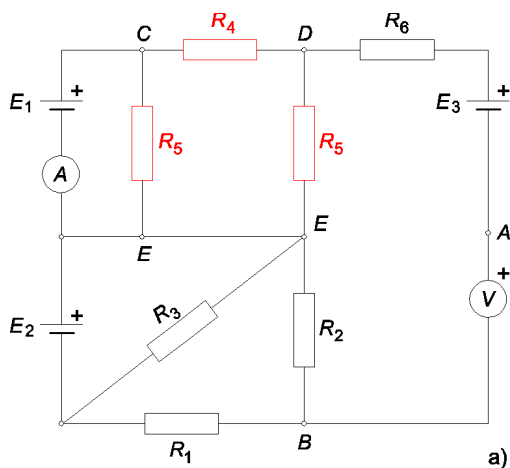
Primjer 12.18.

Odredite pokazivanje ampermetra i voltmetra za električnu shemu prikazanu na slici 1a. Instrumenti su idealni ($R_A \rightarrow 0, R_V \rightarrow \infty$).

Podatci: $R_1 = R_6 = 2 \Omega$, $R_2 = R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$,

$E_1 = E_3 = 24 \text{ V}$, $E_2 = 18 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena trokuta otpora CDE sa zvijezdom otpora CDEO b)

Za odrediti pokazivanje ampermetra i voltmetra nužno je trokut otpora CDE (slika 1a) zamijeniti zvijezdom otpora $CDEO$ (slika 1b). Prema (12.10) dobije se:

$$R_9 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_5} \quad (= 4\Omega) \quad (1)$$

Jednakim postupkom dobije se:

$$R_7 = R_8 \quad (= 2\Omega)$$

Granom $ODAB$ ne teče struja ($R_v \rightarrow \infty$).

Pokazivanje voltmetra jest napon između čvorova A i B .

$$U_V = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = I_2 R_2 + I_7 R_9 - E_3 \quad (2)$$

Voltmetar pokazuje, prema (2), napon od 4 V.

Struje I_2 i I_7 određuju se uporabom II. Kirchhoffova zakona:

$$\text{petlja I.:} \quad E_2 = I_2 (R_1 + R_2) \quad (3)$$

$$\text{petlja II.:} \quad E_1 = I_7 (R_7 + R_9) \quad (4)$$

Iz (3) i (4) dobije se: $I_2 = 3\text{ A}$, $I_A = I_7 = 4\text{ A}$

Ampermetar pokazuje struju jakosti 4 A.



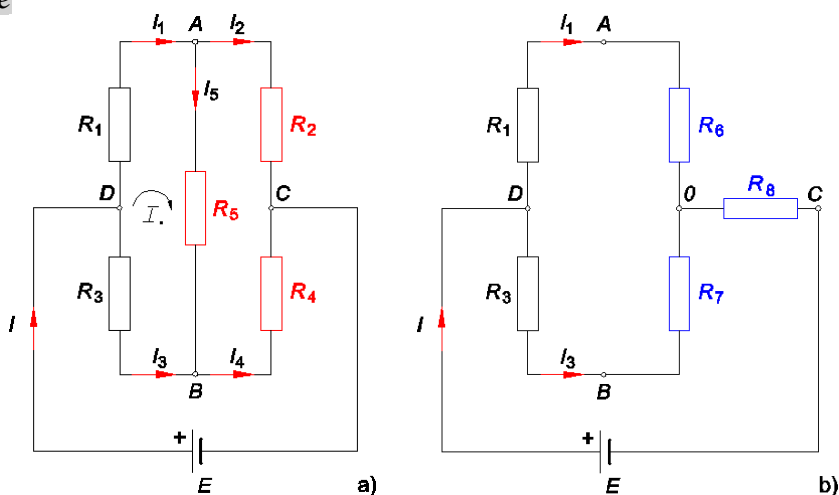
Primjer 12.19.

Na slici 1a prikazana je shema mosnog spoja. Odredite:

- struju grane $A-B$
- struju u grani $A-B$ ako je otpor grane jednak nuli
- otpor R_1 tako da je struja grane $A-B$ jednaka nuli.

Podatci: $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 8\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $E = 24\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema spoja a) i zamjena otpora u spoju trokut s otporima u spoju zvijezda b)

a) Struja I_5 grane $A-B$ određuje se uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju I . (slika 1a):

$$I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_3 R_3 = 0 \quad (1)$$

odakle je:

$$I_5 = \frac{I_3 R_3 - I_1 R_1}{R_5} \quad (2)$$

Određivanje struja I_1 i I_3 .

Napomena: Zadatak je moguće riješiti daljnjom uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona (duži i teži put), pa će se zadatak riješiti zamjenom otpora u spoju trokut s otporima u spoju zvijezda (slika 1b).

Trokut otpora ABC zamjenjuje se zvijezdom otpora $ABCO$. Prema **(12.10)** dobije se:

$$R_6 = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \quad (= 0,75 \Omega) \quad (3)$$

Jednakim postupkom dobije se:

$$R_7 = 1 \Omega \quad , \quad R_8 = 3 \Omega$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor D (slika 1a), dobije se:

$$I = I_1 + I_3 \quad (4)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (= 4,41 \text{A}) \quad (5)$$

struja izvora,

$$R_e = R_8 + \frac{(R_1 + R_6)(R_3 + R_7)}{R_1 + R_6 + R_3 + R_7} \quad (= 5,44 \Omega) \quad (6)$$

ekvivalentni otpor mreže.

Uporabom **(12.8)**, djelitelj struje, za petlju I . (slika 1b), dobije se:

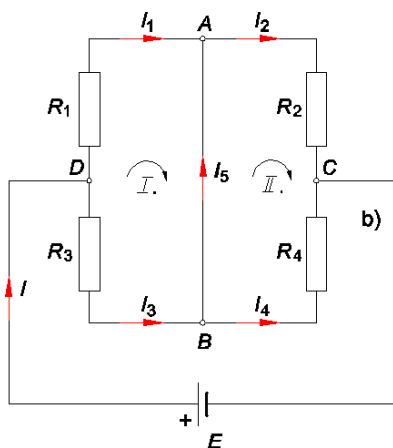
$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3 + R_7}{R_1 + R_6} \quad (=1,87) \quad (7)$$

Jednadžbe (4), (5) i (7) daju:

$$I_1 = 2,87 \text{ A} \quad , \quad I_3 = 1,54 \text{ A}$$

Struja grane $A-B$, prema (2), jest: $I_5 = 0,315 \text{ A}$.

b) Ako je otpor grane $A-B$ (slika 1a) jednak nuli, tada shema mreže s iste slike postaje:



Sl. 2. Shema mreže ako je otpor grane $A-B$ jednak nuli

Struja grane $A-B$, prema slici 2, uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor B jest:

$$I_5 = I_3 - I_4 \quad (8)$$

Struje grana, I_3 i I_4 , izračunat će se dvojako:

b1) Uporaba I. i II. Kirchhoffova zakona za čvorove i petlje sa slike 2.

$$\text{čvor } D: \quad I = I_1 + I_3 \quad (9)$$

$$\text{čvor } C: \quad I = I_2 + I_4 \quad (10)$$

$$\text{petlja } I.: \quad I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \quad (11)$$

$$\text{petlja } II.: \quad I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0 \quad (12)$$

Iz sustava (9) do (12) ili izravno iz primjene strujnog djelitelja dobije se:

$$I_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_3} I \quad (= 1,47 \text{ A}) \quad (13)$$

$$I_4 = \frac{R_2}{R_2 + R_4} I \quad (= 1,89 \text{ A}) \quad (14)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_e} \quad (= 4,42 \text{ A}) \quad (15)$$

struja izvora,

$$R_e = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \quad (= 5,43 \Omega) \quad (16)$$

ekvivalentni otpor mreže.

Uvrštavanjem (13) i (14) u (8) dobije se: $I_5 = -0,42 \text{ A}$.

Predznak minus dolazi iz pogrešno pretpostavljenog smjera struje I_5 .

b2) Uporabom Ohmova zakona za grane $D-B$ i $B-C$:

$$I_3 = \frac{U_{DB}}{R_3} \quad (= 1,47 \text{ A}) \quad (17)$$

$$I_4 = \frac{U_{BC}}{R_4} \quad (= 1,89 \text{ A}) \quad (18)$$

gdje su:

$$U_{DB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} I \quad (= 8,85 \text{ V}) \quad (19)$$

$$U_{BC} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} I \quad (= 15,15 \text{ V}) \quad (20)$$

U_{DB} , U_{BC} - padovi napona,
 I - struja izvora određena s (15).

Uvrštavanjem (17) i (18) u (8) dobije se: $I_5 = -0,42 \text{ A}$.

c) Struja grane A - B jednaka je nuli ako je most uravnotežen. Slijedi, čvorovi A i B su na jednakom potencijalu. Uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlje I . i II . (slika 1a), dobije se:

$$\text{petlja } I.: \quad I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \quad (21)$$

$$\text{petlja } II.: \quad I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0 \quad (22)$$

Dijeljenjem (21) sa (22) uz $I_1 = I_2$ i $I_3 = I_4$ dobije se:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (23)$$

što je uvjet ravnoteže mosta.

Iz (23) dobije se:

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (= 4,5 \Omega) \quad (24)$$

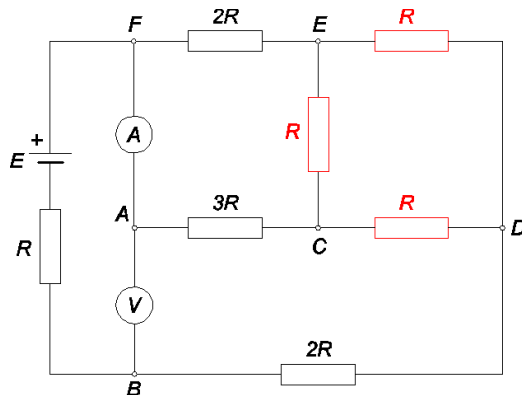


Primjer 12.20.

Za shemu prikazanu na slici 1 odredite pokazivanje ampermetra ako voltmetar između čvorova A i B mjeri napon U_V . Pri proračunu ampermetar i voltmetar smatrajte idealnim.

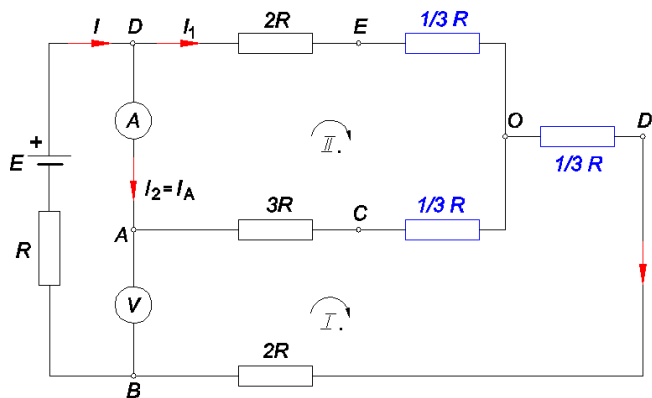
Podatci: $U_V = 40,5 \text{ V}$, $R = 3 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Za određivanje struje ampermetra nužno je trokut otpora CDE (slika 1) zamijeniti zvijezdom otpora $CDEO$ (slika 2). Budući da su otpori u spoju trokut međusobno jednaki, otpori u spoju zvijezda također će biti međusobno jednaki. Njihov iznos, prema (12.10), jest $1/3 R$.



Sl. 2. Zamjena spoja otpora u trokutu sa spojem otpora u zvijezdu

Napon voltmetra, uz uporabu II. Kirchhoffova zakona za petlju I . (slika 2), jest:

$$U_V = I_2(3R + \frac{1}{3}R) + I(\frac{1}{3}R + 2R) \quad (1)$$

Struja izvora I odredit će se uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona za čvor i petlju (slika 2):

$$\text{čvor } D: \quad I = I_1 + I_2 \quad (2)$$

$$\text{petlja II:} \quad I_1(2R + \frac{1}{3}R) - I_2(3R + \frac{1}{3}R) = 0 \quad (3)$$

Rješenje sustava (2) i (3) daje:

$$I = 2,43I_2 \quad (4)$$

Uvrštavanjem (4) i (1) uz zadane podatke dobije se: $I_2 = I_A = 1,5 \text{ A}$.



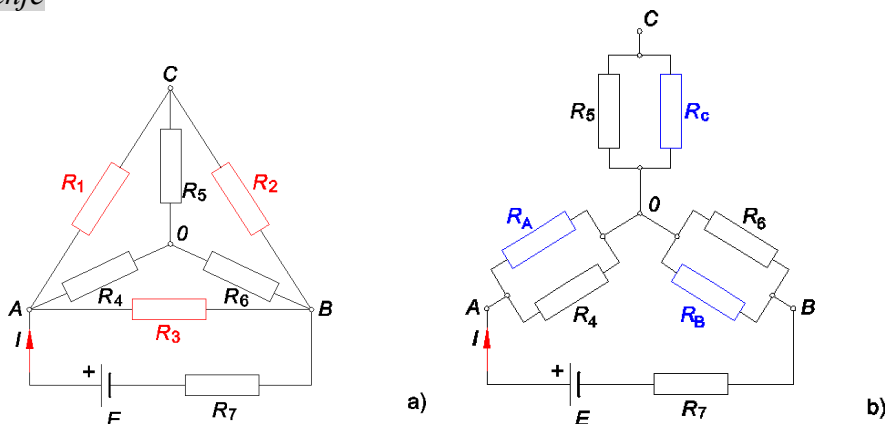
Primjer 12.21.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1a.

Odredite snagu izvora.

Podatci: $R_1 = R_2 = R_3 = 6\Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 2\Omega$, $R_7 = 4\Omega$, $E = 12 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a), zamjena otpora u spoju trokut ABC s otporima u spoju zvijezda ABCO b)

Snaga naponskog izvora, prema (12.3), jest:

$$P = EI \quad (1)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_c + R_7} \quad (2)$$

I - struja izvora,

R_e - ekvivalentni otpor zvijezda - trokut između čvorova A - B .

Za odrediti ekvivalentni otpor R_e nužno je otpore u spoju trokut ABC zamijeniti otporima u spoju zvijezda $ABCO$. Prema (12.10) dobije se:

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (= 2 \Omega) \quad (3)$$

Budući da su otpori $R_1 = R_2 = R_3$, slijedi $R_A = R_B = R_C$.

Prema slici 1b ekvivalentni otpor jest:

$$R_e = \frac{R_A R_4}{R_A + R_4} + \frac{R_B R_6}{R_B + R_6} \quad (= 2 \Omega) \quad (4)$$

Uvrštavanjem (4) u (2) uz zadane E i R_7 dobije se: $I = 2 \text{ A}$.

Snaga izvora, prema (1), jest: $P = 24 \text{ W}$.

Napomena: Isti zadatak riješiti tako da zvijezdu otpora $ABCO$ zamijenite trokutom otpora ABC .

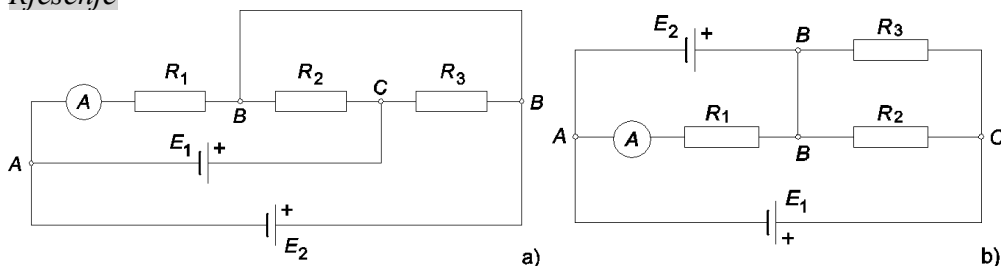


Primjer 12.22.

Za shemu prema slici 1 odredite pokazivanje ampermetra.

Podatci: $R_1 = R_2 = R_3 = R = 3 \Omega$, $E_1 = E_2 = E = 15 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i njezin drugačiji prikaz b)

Iz sheme sa slike 1b vidi se da je za pokazivanje ampermetra mjerodavan idealni naponski izvor E_2 .

$$I_A = \frac{E_2}{R_1} \quad (= 5 \text{ A})$$

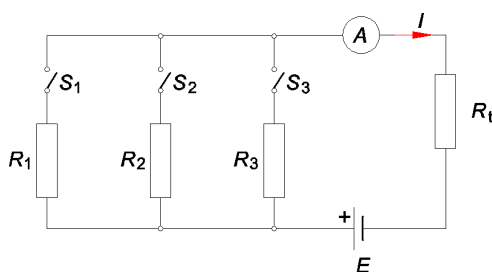


Primjer 12.23.

Odredite iznos otpora R_2 i R_3 tako da je prirast struje ΔI sačuvan isti ako se redom uključuju sklopke S_1 , S_2 i S_3 (slika 1).

Podatci: $E = 12 \text{ V}$, $\Delta I = 1,5 \text{ A}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_t = 1 \Omega$, R_{in} - uključen u otpor trošila.

Rješenje



Sl. 1. Otpori R_1 , R_2 i R_3 spojeni su paralelno

Ako se uključi sklopka S_1 , tada je struja kroz trošilo:

$$I_1 = \frac{E}{R} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (1)$$

gdje je:

$$R = R_1 + R_t \quad (= 3 \Omega) \quad (2)$$

serijski spoj otpora.

Ako se uključi sklopka S_2 (sklopka S_1 ostaje uključena), tada je struja trošila:

$$I_2 = \frac{E}{R_{12}} \quad (3)$$

gdje je:

$$I_2 = I_1 + \Delta I \quad (= 5,5 \text{ A})$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_t \quad (4)$$

mješoviti spoj otpora.

Uvrštavanjem (4) u (3) dobije se.

$$R_2 = \frac{ER_1 - R_1 R_t I_2}{I_2(R_1 + R_t) - E} \quad (= 2,89\Omega) \quad (5)$$

Uključivanjem sklopke S_3 (sklopke S_1 i S_2 ostaju uključene) struja trošila jest:

$$I_3 = EG \quad (6)$$

gdje je:

$$I_3 = I_2 + \Delta I \quad (= 7\text{ A}) \quad (7)$$

$$G = \frac{(G_1 + G_2 + G_3)G_t}{G_1 + G_2 + G_3 + G_t} \quad (8)$$

vodljivost mješovitog spoja (jednostavnosti radi prešlo se na ekvivalentnu vodljivost tri paralelne grane umjesto na ekvivalentne otpore).

Uvrštavanjem (8) u (6) uz (7) dobije se:

$$G_3 = \frac{(G_1 + G_2)G_t E - (G_1 + G_2 + G_t)I_3}{I_3 - G_t E} \quad (9)$$

iznosa: $G_3 = 0,554\text{ S}$, $R_3 = 1,81\Omega$.

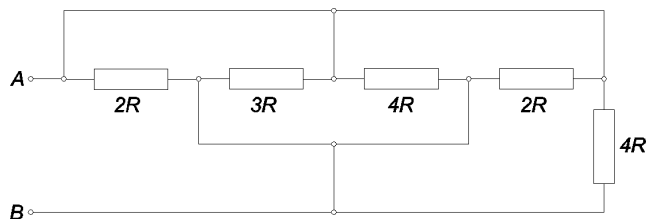


Primjer 12.24.

Za shemu na slici 1 odredite iznos otpora između čvorova A i B .

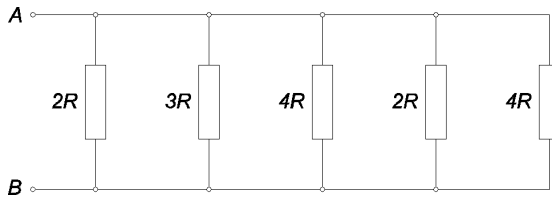
Podatci: $R = 22\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema otpora

Shema otpora sa slike 1 može se prikazati kao:



Sl. 2. Spoj otpora sa slike 1 jest paralelni spoj otpora

Ekvivalentni otpor paralelnog spoja otpora, prema (12.6), jest:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} \quad (1)$$

Iz (1) dobije se:

$$R_e = \frac{6}{11} R \quad (=12\Omega) \quad (2)$$



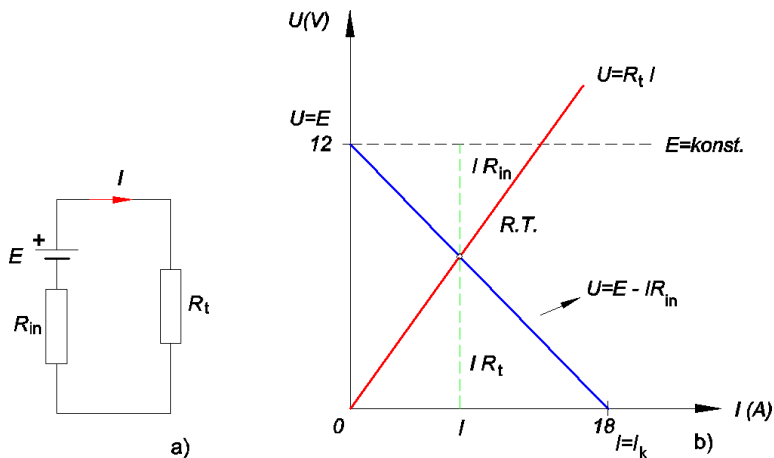
Primjer 12.25.

Zadana je vanjska karakteristika realnog naponskog izvora (slika 1b). Ako je otpor trošila R_t , odredite:

- parametre naponskog izvora (E i R_{in})
- struju trošila.

Podatci: $R_t = 8\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Nadomjesna shema realnog naponskog izvora a), vanjska karakteristika realnog naponskog izvora i karakteristika trošila b)

Iz vanjske karakteristike naponskog izvora (slika 1b), vidljivo je, za $I = 0 \text{ A}$, da je $E = 12 \text{ V}$, a to je *EMS* električnog izvora.

Za odrediti unutarnji otpor R_{in} električnog izvora nužno je odrediti radnu točku. Radna točka dobije se kao sjecište vanjske karakteristike naponskog izvora i karakteristike trošila. Vanjska karakteristika izvora, jednadžba pravca kroz dvije točke $T_1(0,12)$ - prazni hod ($R_t \rightarrow \infty$) i $T_2(18,0)$ - kratki spoj ($R_t \rightarrow 0$), prema slici 1b, jest:

$$U = -0,67I + 12 \quad (1)$$

Karakteristika trošila (jednadžba pravca kroz ishodište), za zadani otpor trošila, jest:

$$U = 8I \quad (2)$$

Rješenje (1) i (2) daje koordinate radne točke: R.T.(1,38;11,08).

Iz koordinata radne točke i slike 1b dobije se:

struja trošila: $I = 1,38 \text{ A}$.

napon trošila: $U_t = U$ ($= 11,08 \text{ V}$).

pad napona na unutarnjem otporu: $U_{\text{in}} = E - U_t$ ($= 0,92 \text{ V}$).

Budući da je pad napona na unutarnjem otporu: $U_{\text{in}} = R_{\text{in}} I$, slijedi unutarnji otpor naponskog izvora:

$$R_{\text{in}} = \frac{U_{\text{in}}}{I} \quad (= 0,666 \Omega) \quad (3)$$

Napomena: Zadatak se može riješiti i izravno iz karakteristike:

$$I_k = \frac{E}{R_{\text{in}}}, \quad R_{\text{in}} = \frac{E}{I_k} = \frac{12 \text{ V}}{18 \text{ A}} = 0,666 \Omega, \quad I = \frac{E}{R_t + R_{\text{in}}} = 1,38 \text{ A},$$

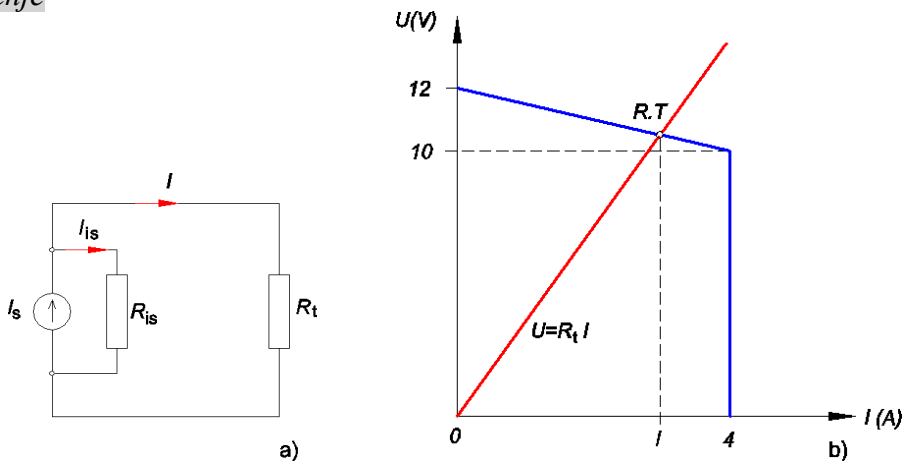
$$U_t = IR_t = 11,08 \text{ V}, \quad U_{\text{in}} = E - U_t = 0,92 \text{ V}$$



Primjer 12.26.

Vanjska karakteristika strujnog izvora (sunčana ćelija) prikazana je na slici 15.20 II. sveska. Ona se može dobro nadomjestiti s dva pravca kako je to prikazano na slici 1b. Odredite struju idealnog strujnog izvora I_s i unutarnji otpor strujnog izvora R_{is} .

Podatci: $R_t = 3\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Nadomjesna shema strujnog izvora a), pripadna vanjska karakteristika s ucrtanom karakteristikom trošila b)

Iz vanjske karakteristike strujnog izvora (slika 1b), vidljiva je u praznom hodu struja izvora:

$$I_s = 4 \text{ A} \quad (1)$$

Unutarnji otpor strujnog izvora, prema nadomjesnoj slici 1a, određuje se uporabom (12.8) (djelitelj struje):

$$R_{is} = \frac{I}{I_{is}} R_t \quad (2)$$

Struja trošila određena je radnom točkom na vanjskoj karakteristici strujnog izvora. Vanjska karakteristika strujnog izvora, na osnovi podataka sa slike 1b (jednadžba pravca kroz dvije točke), jest:

$$U = 12 - 0,5I \quad (3)$$

Karakteristika trošila (jednadžba pravca kroz ishodište), za zadani otpor trošila R_t , jest:

$$U = 3I \quad (4)$$

Rješenje (3) i (4) daje koordinate radne točke: R.T.(3,43;10,28).

Iz koordinata radne točke struja trošila jest: $I = 3,43 \text{ A}$.

Struja unutarnjeg otpora, prema nadomjesnoj shemi sa slike 1a, jest:

$$I_{is} = I_s - I \quad (= 0,57 \text{ A}) \quad (5)$$

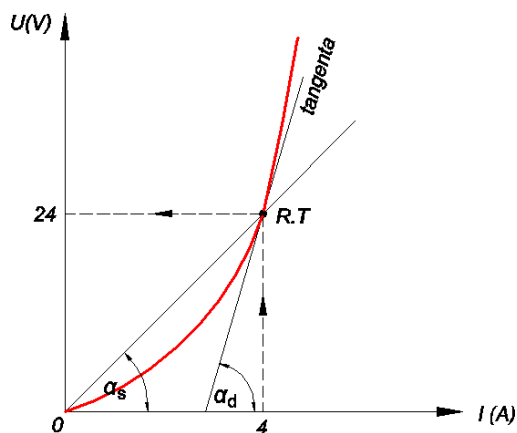
Prema (2) dobije se: $R_{is} = 18,05 \Omega$.



Primjer 12.27.

U trajnom radu kroz žarulju s ugljenom niti teče struja jakosti I . Njezina voltamperska karakteristika dana je jednadžbom $U = \frac{3}{2}I^2$. Odredite za ovo pogonsko stanje statički i dinamički otpor.
Podatci: $I = 4 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Voltamperska karakteristika žarulje s ugljenom niti

Za zadanu struju u trajnom radu, $I = I_0 = 4 \text{ A}$, pripadni napon jest $U = U_0 = 24 \text{ V}$. Slijedi, koordinate radne točke jesu R.T.(4; 24).

Statički otpor, prema (12.11), jest:

$$R_s = \frac{U_0}{I_0} = \operatorname{tg} \alpha_s \quad (= 6 \Omega) \quad (1)$$

Dinamički otpor, prema (12.12), jest:

$$R_d = \operatorname{tg} \alpha_d = U' = \left. \frac{d}{dI} \left(\frac{3}{2} I^2 \right) \right|_{I=I_0} \quad (2a)$$

$$R_d = (3I) \Big|_{I=I_0} \quad (= 12 \Omega) \quad (2b)$$

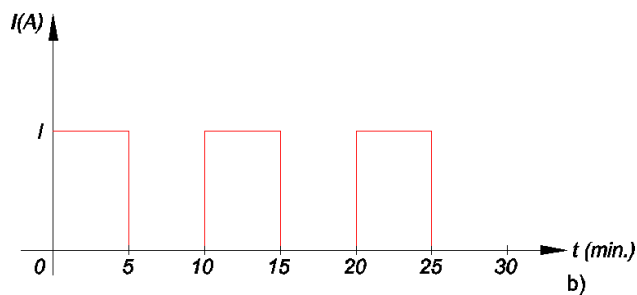
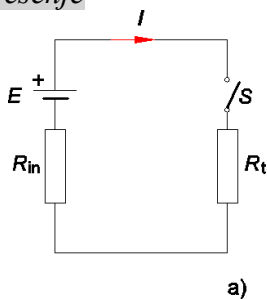


Primjer 12.28.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1a. Ako se sklopka S otvara/zatvara u jednakim vremenskim intervalima (slika 1b), odredite stupanj iskorištenja ove mreže.

Podatci: $E = 24 \text{ V}$, $R_{\text{in}} = 1,5 \Omega$, $R_t = 7 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema mreže a) i promjena struje b)

Stupanj iskorištenja, prema (12.16) jest:

$$\eta = \frac{W_k}{W_k + W_g} \quad (1)$$

Budući da je vremenski interval u svim izrazima za energiju isti, (1) prema (12.17) postaje:

$$\eta = \frac{P_k}{P_k + P_g} \quad (2)$$

Budući da je struja u strujnom krugu ista za sve parametre strujnog kruga, (2) prema (12.18) postaje:

$$\eta = \frac{R_t}{R_t + R_{in}} \quad (= 0,824 \text{ ili } 82,4\%) \quad (3)$$

Napomena: Intermitirano opterećenje ovakve vrste ne utječe na gubitke. Kada je sklopka isključena (prazni hod), nema ni gubitaka, $I = 0$, $R_t \rightarrow \infty$, $\eta = 1 = 100\%$.



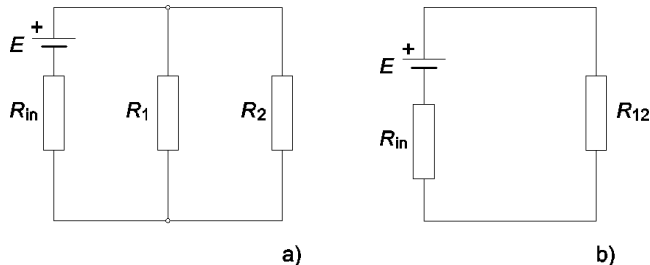
Primjer 12.29.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1a. Odredite:

- snagu izvora i trošila
- energiju što je izvor preda trošilu u vremenu od 30 minuta
- stupanj iskorištenja ove mreže.

Podatci: $E = 24 \text{ V}$, $R_{in} = 0,5 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema mreže a) i pojednostavljena shema b)

a) Snaga izvora, prema Jouleovu zakonu (11.4), jest:

$$P_{iz} = P_t + P_g \quad (1)$$

gdje je:

$$P_t = I^2 R_{12} \quad (2)$$

snaga trošila,

$$P_g = I^2 R_{in} \quad (3)$$

gubitak snage na unutarnjem otporu R_{in} .

Struja izvora jest:

$$I = \frac{E}{R_{12} + R_{in}} \quad (4)$$

gdje je:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 1,87 \Omega) \quad (5)$$

paralelni spoj otpora R_1 i R_2 .

Uvrštavanjem (5) u (4) dobije se: $I = 10,13 \text{ A}$.

Prema (1), (2) i (3) dobije se:

$$P_t = 191,89 \text{ W} \quad , \quad P_g = 51,31 \text{ W} \quad , \quad P_{iz} = 243,2 \text{ W}$$

b) Energija/rad prema **(12.13)** jest:

$$W = P_t T \quad (6)$$

gdje je:

P_t - snaga trošila (=191,89 W),
 T - vrijeme (=30 min=0,5 h).

Prema (6) dobije se: $W = 95,95 \text{ Wh}$.

c) Stupanj iskorištenja, prema **(12.17)**, jest:

$$\eta = \frac{P_k}{P_k + P_g} = \frac{P_t}{P_t + P_g} \quad (7)$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (7) dobije se:

$$\eta = \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{in}} \quad (= 0,789 \text{ ili } 78,9\%) \quad (8)$$

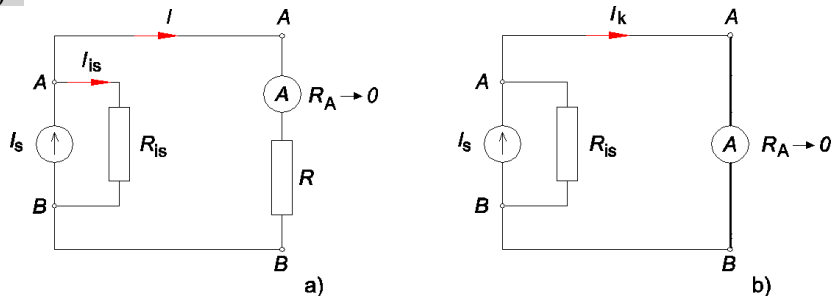


Primjer 12.30.

Trošilom otpora R , priključenim na strujni izvor, teče struja jakosti I . U kratkom spoju (slika 1b) ampermetar pokazuje struju I_k . Odredite:

- unutarnji otpor strujnog izvora
- stupanj iskorištenja.

Podatci: $R = 18\Omega$, $I = 90\text{ A}$, $I_k = 100\text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema strujnog izvora a) i strujni izvor u kratkom spoju b)

Iz slike 1b vidljivo je da je struja idealnog strujnog izvora:

$$I_s = I_k \quad (= 100\text{ A}) \quad (1)$$

a) Iz jednakosti napona na unutarnjem otporu R_{is} i trošilu R dobije se:

$$R_{is} = R \frac{I}{I_{is}} \quad (2)$$

gdje je, uz uporabu I. Kirchhoffova zakona za čvor A-slika 1a:

$$I_{is} = I_s - I \quad (= 10\text{ A}) \quad (3)$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobije se: $R_{is} = 162\Omega$.

b) Stupanj iskorištenja, prema (12.17), jest:

$$\eta = \frac{P_k}{P_g + P_k} \quad (4)$$

gdje je:

$$P_k = I^2 R \quad (5)$$

korisna snaga razvijena na otporu R ,

$$P_g = I_{is}^2 R_{is} \quad (6)$$

snaga gubitaka na unutarnjem otporu R_{is} .

Uvrštavanjem (5) i (6) u (4) dobije se:

$$\eta = \frac{I^2 R}{I_{is}^2 R_{is} + I^2 R} \quad (= 0,9 \text{ ili } 90\%) \quad (7)$$

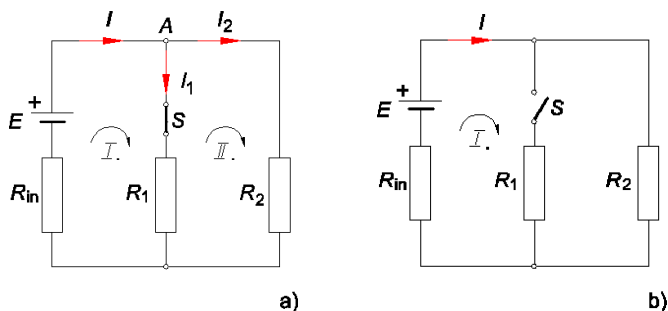


Primjer 12.31.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite stupanj iskorištenja mreže u vremenu 30 min. ako je sklopka S zatvorena – otvorena - zatvorena u jednakim vremenskim intervalima Δt^* .

Podatci: $E = 24 \text{ V}$, $R_{in} = 1 \Omega$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $\Delta t = 10 \text{ min}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže. Sklopka S je zatvorena a) i otvorena b)

Stupanj iskorištenja prema (12.16) jest:

$$\eta = \frac{W_k}{W_k + W_g} \quad (1)$$

gdje je:

$$W_k = I_k^2 R_k \quad (2)$$

* U sljedećim primjerima, jednostavnosti radi, vremenski interval Δt pisat će se t .

korisna energija što je izvor predaje trošilu,

$$W_g = I^2 R_{in} \quad (3)$$

energija gubitaka na unutarnjem otporu.

a) Sklopka S je zatvorena (intervali 0-10 min., 20-30 min.).

Uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona za sliku 1a dobije se:

$$\text{petlja I.:} \quad IR_{in} + I_1 R_1 = E \quad (4)$$

$$\text{petlja II.:} \quad I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0 \quad (5)$$

$$\text{čvor A:} \quad I - I_1 - I_2 = 0 \quad (6)$$

Sustav jednažbi daje:

$$I_1 = \frac{ER_2}{(R_1 + R_2)R_{in} + R_1 R_2} \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{ER_1}{(R_1 + R_2)R_{in} + R_1 R_2} \quad (8)$$

iznosa: $I = 5,54 \text{ A}$, $I_1 = 3,69 \text{ A}$, $I_2 = 1,85 \text{ A}$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i na drugi način uporabom izraza:

$$I = \frac{E}{R_e}, \quad I = I_1 + I_2, \quad I_1 : I_2 = R_2 : R_1, \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{in} .$$

Energija što je daje izvor u 1. i 2. intervalu jest:

$$W_{ka} = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2) 2\Delta t \quad (= 34,1 \text{ Wh}) \quad (9)$$

gdje je: $2\Delta t = 1/3 \text{ h}$.

Gubitci na unutarnjem otporu (isto vrijeme).

$$W_{ga} = I^2 R_{in} 2\Delta t \quad (= 10,23 \text{ Wh}) \quad (10)$$

b) Sklopka S je otvorena (interval od 10 do 20 min.).
Iz II. Kirchhoffova zakona dobije se:

$$I = \frac{E}{R_{\text{in}} + R_2} \quad (= 2,18 \text{ A}) \quad (11)$$

Energija što je izvor daje 2. trošilu jest:

$$W_{\text{kb}} = I^2 R_2 \Delta t \quad (= 7,92 \text{ Wh}) \quad (12)$$

gdje je: $\Delta t = 1/6 \text{ h}$.

Gubitci na unutarnjem otporu (isto vrijeme).

$$W_{\text{gb}} = I^2 R_{\text{in}} \Delta t \quad (= 0,79 \text{ Wh})$$

Uvrštavanjem (2) i (3) za oba stanja strujnog kruga u (1) dobije se:

$$\eta = \frac{W_{\text{ka}} + W_{\text{kb}}}{(W_{\text{ga}} + W_{\text{gb}}) + (W_{\text{ka}} + W_{\text{kb}})} \quad (= 0,792 \text{ ili } 79,2\%)$$

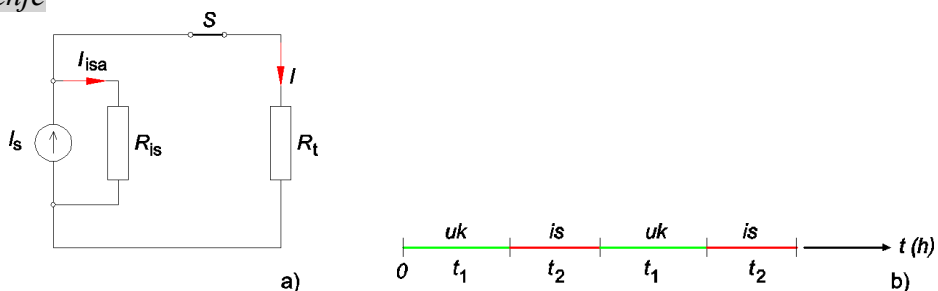


Primjer 12.32.

Trošilo otpora R_t spojeno je na strujni električni izvor (slika 1). Odredite stupanj iskorištenja ove mreže ako je trošilo u jednom danu (24 h) uključeno 35 min. u svakom satu.

Podatci: $I_s = 5 \text{ A}$, $R_{\text{is}} = 20 \Omega$, $R_t = 10 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i vrijeme ukapćanja i iskapćanja b)

Budući da trošilo R_t i unutarnji otpor R_{is} nemaju isto vrijeme rada, nužno je stupanj iskorištenja električne mreže odrediti uporabom energetske bilanse. Prema (12.16) dobije se:

$$\eta = \frac{W_k}{W_g + W_k} \quad (1)$$

gdje je:

$$W_k = W_{ka} \quad (2)$$

korisna energija na trošilu pri uključenoj sklopki S ,

$$W_g = W_{ga} + W_{gb} \quad (3)$$

energija gubitaka na unutarnjem otporu izvora pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S .

a) Sklopka S je uključena* ($t_1=35$ minuta).

- korisna energija:

$$W_{ka} = I^2 R_t t_1 \quad (= 64,68 \text{ Wh}) \quad (4)$$

gdje je:

$$I = \frac{R_{is}}{R_{is} + R_t} I_s \quad (= 3,33 \text{ A}) \quad (5)$$

struja trošila.

- energija gubitaka:

$$W_{ga} = I_{isa}^2 R_{is} t_1 \quad (= 32,54 \text{ Wh}) \quad (6)$$

gdje je:

$$I_{isa} = I_s - I \quad (= 1,67 \text{ A}) \quad (7)$$

struja koja teče unutarnjim otporom R_{is} .

b) Sklopka S je isključena ($t_2=25$ minuta).

- korisna energija:

* Račun se načini u jednom satu, ostalo vrijeme je ponavljanje.

$$W_{kb} = 0 \quad (8)$$

Isključenjem sklopke struja trošila jednaka je nuli, $I = 0$.

- energija gubitaka:

$$W_{gb} = I_{isb}^2 R_{is} t_2 \quad (= 208,33 \text{ Wh}) \quad (9)$$

gdje je:

$$I_{isb} = I_s \quad (= 5 \text{ A}) \quad (10)$$

struja koja teče unutarnjim otporom R_{is} .

Uvrštavanjem (4) u (2) odnosno (6) i (8) u (3) dobije se s (1):

$$\eta = 0,2117 \quad (= 21,17\%)$$

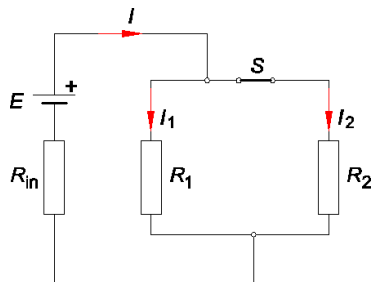


Primjer 12.33.

Dva trošila otpora R_1 i R_2 paralelno su spojena (slika 1a) i priključena na naponski električni izvor. Odredite stupanj iskorištenja ove mreže ako sklopka S uključuje trošilo R_2 u svakom satu 50 min.

Podatci: $E = 48 \text{ V}$, $R_{in} = 2 \Omega$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Trošila u paralelnom spoju priključena su na naponski električni izvor

Budući da trošila R_1 i R_2 te unutarnji otpor R_{in} nemaju isto vrijeme rada, nužno je stupanj iskorištenja električne mreže odrediti uporabom energetske bilanse. Prema (12.16) dobije se:

$$\eta = \frac{W_k}{W_g + W_k} \quad (1)$$

gdje je:

$$W_k = W_{ka} + W_{kb} \quad (2)$$

korisna energija na trošilu pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S ,

$$W_g = W_{ga} + W_{gb} \quad (3)$$

energija gubitaka na unutarnjem otporu izvora pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S .

a) Sklopka S je uključena ($t_1=50$ minuta).

- korisna energija:

$$W_{ka} = I^2 R_{12} t_1 \quad (= 117,65 \text{ Wh}) \quad (4)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_{in} + R_{12}} \quad (= 3,43 \text{ A}) \quad (5)$$

struja trošila,

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 12 \Omega) \quad (6)$$

ekvivalentni otpor trošila (paralelni spoj).

- energija gubitaka:

$$W_{ga} = I^2 R_{in} t_1 \quad (= 19,61 \text{ Wh}) \quad (7)$$

b) Sklopka S je otvorena ($t_2=10$ minuta).

- korisna energija:

$$W_{kb} = I_1^2 R_1 t_2 \quad (= 15,84 \text{ Wh}) \quad (8)$$

gdje je:

$$I_1 = I = \frac{E}{R_{in} + R_1} \quad (= 2,18 \text{ A}) \quad (9)$$

- energija gubitaka:

$$W_{gb} = I_1^2 R_{in} t_2 \quad (= 1,58 \text{ Wh}) \quad (10)$$

Uvrštavanjem (4) i (7) u (2) odnosno (8) i (10) u (3) dobije se s (1):

$$\eta = 0,863 \quad (= 86,3\%)$$



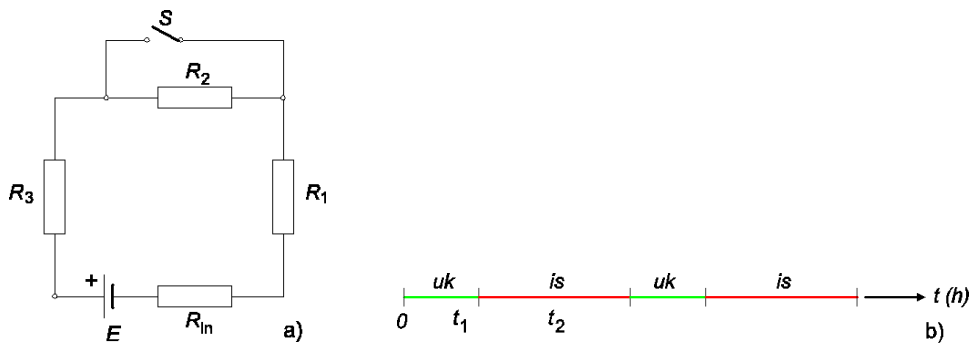
Primjer 12.34.

Tri trošila R_1 , R_2 i R_3 spojena su na naponski izvor (slika 1a). Odredite stupanj iskorištenja električne mreže ako se sklopka S uključuje-isključuje u pravilnim vremenskim intervalima (slika 2).

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $E = 24 \text{ V}$, $R_{in} = 1\Omega$, $t_1 = T$,

$t_2 = 2T$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i vrijeme ukapčanja-iskapčanja b)

Budući da trošila R_1 , R_2 i R_3 nemaju isto vrijeme rada, stupanj iskorištenja nužno je odrediti uporabom energetske bilanse. Prema (12.16) dobije se:

$$\eta = \frac{W_k}{W_g + W_k} \quad (1)$$

gdje je:

$$W_k = W_{ka} + W_{kb} \quad (2)$$

korisna energija na trošilima pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S ,

$$W_g = W_{ga} + W_{gb} \quad (3)$$

energija gubitaka na unutarnjem otporu izvora pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S .

a) Sklopka S je uključena ($t_1=T$).

- korisna energija:

$$W_{ka} = I_a^2(R_1 + R_3)T \quad (= 35,84T) \quad (4)$$

- energija gubitaka:

$$W_{ga} = I_a^2 R_{in} T \quad (= 2,56T) \quad (5)$$

gdje je:

$$I_a = \frac{E}{R_{in} + R_1 + R_3} \quad (= 1,6 \text{ A}) \quad (6)$$

b) Sklopka S je isključena ($t_2=2T$).

- korisna energija:

$$W_{kb} = I_b^2(R_1 + R_2 + R_3)2T \quad (= 51,98T) \quad (7)$$

- energija gubitaka:

$$W_{gb} = I_b^2 R_{in} 2T \quad (= 2,6T) \quad (8)$$

gdje je:

$$I_b = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{in}} \quad (= 1,14 \text{ A}) \quad (9)$$

Uvrštavanjem (4) i (7) u (2) odnosno (5) i (8) u (3) dobije se s (1):

$$\eta = 0,9445 \quad (= 94,45\%)$$

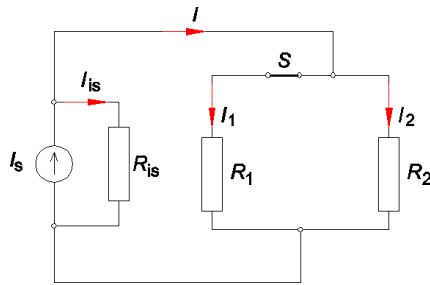


Primjer 12.35.

Dva trošila otpora R_1 i R_2 paralelno su spojena (slika1) i priključena na strujni električni izvor. Odredite stupanj iskorištenja ove mreže ako sklopka S uključuje trošilo R_1 u svakom satu 42 minute.

Podatci: $I_s = 10 \text{ A}$, $R_{is} = 20 \Omega$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Trošila u paralelnom spoju priključena su na strujni električni izvor

Budući da trošila R_1 i R_2 nemaju isto vrijeme rada, nužno je stupanj iskorištenja električne mreže odrediti uporabom energetske bilanse. Prema (12.16) dobije se:

$$\eta = \frac{W_k}{W_g + W_k} \quad (1)$$

gdje je:

$$W_k = W_{ka} + W_{kb} \quad (2)$$

korisna energija na trošilu pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S ,

$$W_g = W_{ga} + W_{gb} \quad (3)$$

energija gubitaka na unutarnjem otporu izvora pri uključenoj odnosno isključenoj sklopki S .

a) Sklopka S je uključena ($t_1=42$ min.).

- korisna energija:

$$W_{ka} = I^2 R_{12} t_1 \quad (= 277,48 \text{ Wh}) \quad (4)$$

gdje je:

$$I = \frac{R_{is}}{R_{is} + R_{12}} I_s \quad (= 7,27 \text{ A}) \quad (5)$$

struja trošila, a

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 7,5 \Omega) \quad (6)$$

ekvivalentni otpor trošila (paralelni spoj).

- energija gubitaka:

$$W_{ga} = I_{isa}^2 R_{is} t_1 \quad (= 104,34 \text{ Wh}) \quad (7)$$

gdje je:

$$I_{isa} = I_s - I \quad (= 2,73 \text{ A}) \quad (8)$$

b) Sklopka S je isključena ($t_2=18$ minuta).

- korisna energija:

$$W_{kb} = I_2^2 R_2 t_2 \quad (= 144 \text{ Wh}) \quad (9)$$

gdje je:

$$I_2 = I = \frac{R_{is}}{R_{is} + R_2} I_s \quad (= 4 \text{ A})$$

- energija gubitaka:

$$W_{gb} = I_{isb}^2 R_{is} t_2 \quad (= 216 \text{ Wh}) \quad (10)$$

gdje je:

$$I_{isb} = I_s - I_2 \quad (= 6 \text{ A}) \quad (11)$$

Uvrštavanjem (4) i (9) u (2) odnosno (7) i (10) u (3) dobije se s (1):

$$\eta = 0,5682\dots (= 56,82\%)$$



Primjer 12.36.

Odredite otpor R (slika 1a) tako da se na njemu razvija maksimalna snaga.

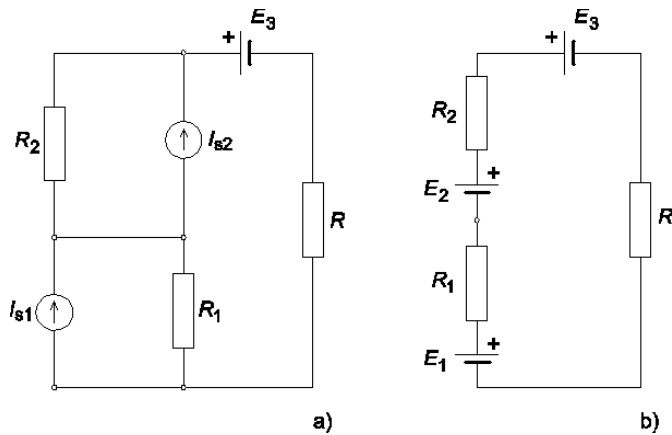
Također odredite:

a) razvijenu snagu na trošilu

b) stupanj iskorištenja električne mreže.

Podatci: $I_{s1} = 5 \text{ A}$, $I_{s2} = 10 \text{ A}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $E_3 = 50 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena strujnih izvora naponskim b)

Električni izvor, ili više njih, predat će trošilu maksimalnu snagu ako je, prema (12.15), otpor izvora (nadomještenog) jednak otporu trošila:

$$R_{\text{in}} = R_{\text{is}} = R \quad (1)$$

Za odrediti unutarnji otpor izvora, nužno je strujne izvore (slika 1a) zamijeniti naponskim izvorima (slika 1b). Prema (12.1) i (12.2) dobije se:

$$R_1 = R_{\text{in1}} \quad (= 2 \Omega) \quad R_2 = R_{\text{in2}} \quad (= 3 \Omega) \quad (2)$$

$$E_1 = I_{s1} R_1 \quad (= 10 \text{ V}) \quad E_2 = I_{s2} R_2 \quad (= 30 \text{ V}) \quad (3)$$

Ekvivalentna EMS naponskih izvora (serijski spoj i protuspoj) jest:

$$E = E_1 + E_2 - E_3 \quad (= -10 \text{ V}) \quad (4)$$

Otpor trošila jednak je, prema (1), i slici 1b:

$$R = R_{\text{in}} = R_1 + R_2 \quad (= 5 \Omega) \quad (5)$$

a) Snaga na trošilu, prema Jouleovu zakonu, jest:

$$P_k = P_g = I^2 R \quad (= 20 \text{ W}) \quad (6)$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (7)$$

struja trošila.

b) Stupanj iskorištenja, prema (12.17), jest:

$$\eta = \frac{P_k}{P_g + P_k} = \frac{I^2 R}{I^2 (R_{in} + R)} \quad (= 0,5 \text{ ili } 50 \%)$$

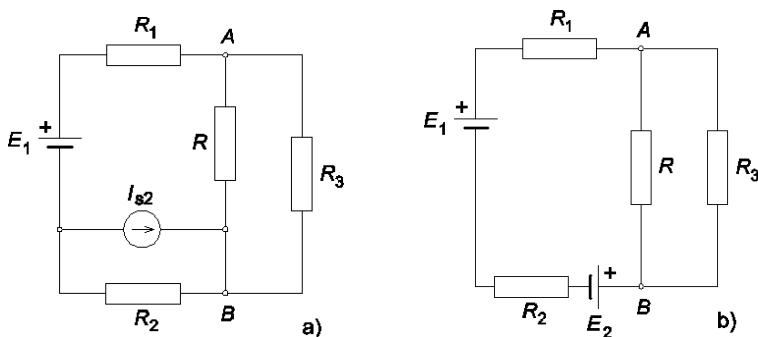


Primjer 12.37.

Odredite otpor R (slika 1a) tako da se na njemu razvije maksimalna snaga. Također odredite stupanj iskorištenja.

Podatci: $E_1 = 48 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R_3 = 18 \Omega$, $I_{s2} = 3 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena strujnog izvora naponskim b)

a) Električni izvor, ili više njih, predat će trošilu maksimalnu snagu ako je, prema (12.15), otpor izvora (nadmještenog) jednak otporu trošila:

$$R_{in} = R_{is} = R \quad (1)$$

Za odrediti unutarnji otpor izvora nužno je strujni izvor (slika 1a) zamijeniti naponskim izvorom (slika 1b). Prema (12.1) i (12.2) dobije se:

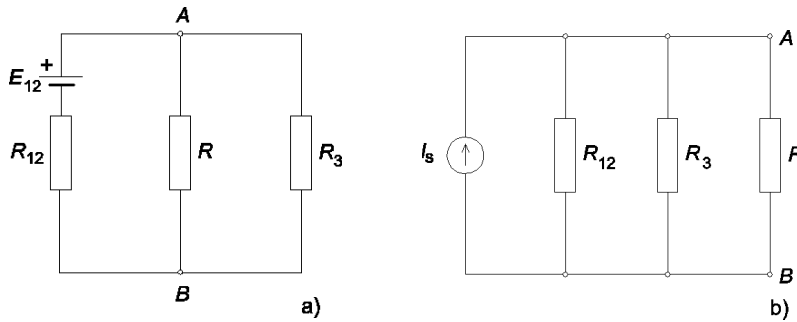
$$R_{is2} = R_{in2} = R_2 \quad (= 12 \Omega) \quad (2)$$

$$E_2 = I_{s2} R_{in2} \quad (= 36 \text{ V}) \quad (3)$$

Iz slike 1b, lijevo od čvorova AB , dobije se:

$$E_{12} = E_1 - E_2 \quad (=12\text{ V}) \quad (4)$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 \quad (=18\Omega) \quad (5)$$



Sl. 2. EMS E_{12} jest serijski protuspoj izvora E_1 i E_2 a) i zamjena naponskog izvora strujnim b)

Zamjena naponskog izvora strujnim, slika 2a i 2b, jest:

$$I_s = \frac{E}{R_{12}} \quad (=0,66\text{ A}) \quad (6)$$

Iz slike 2b i (1) slijedi (paralelni spoj otpora R_{12} i R_3).

$$R = R_{is} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} \quad (=9\Omega) \quad (7)$$

b) Stupanj iskorištenja, prema (12.17), jest:

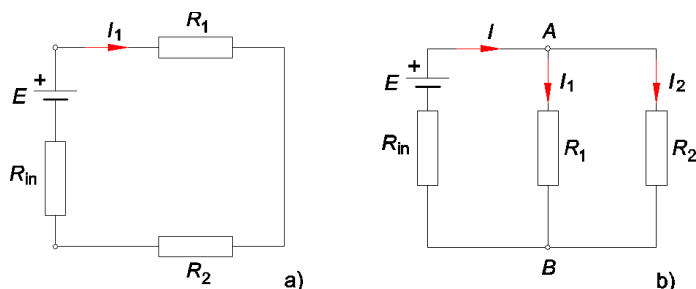
$$\eta = \frac{P_k}{P_g + P_k} = \frac{I^2 R}{I^2 (R_{is} + R)} \quad (=0,5 \text{ ili } 50\%) \quad (8)$$



Primjer 12.38.

Naponski izvor napaja dva trošila otpora R_1 i R_2 jedan put spojena serijski (slika 1a), a drugi put spojena paralelno (slika 1b). Ako je struja kroz otpor R_1 u oba spoja jednaka i ako je napon na čvorovima A - B izvora u paralelnom spoju U_{AB} , odredite parametre naponskog izvora.

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $U_{AB} = 18\text{ V}$.

Rješenje

Sl. 1. Trošila otpora R_1 i R_2 jedan su put spojeni serijski a) a drugi put paralelno b)

Parametri naponskog izvora jesu E i R_{in} .

Uporabom II Kirchhoffova zakona za sheme sa slike 1 dobije se:

slika 1a:

$$E - I_1 R_{in} = I_1 (R_1 + R_2) \quad (1)$$

gdje je:

I_1 -struja izvora serijskog spoja.

slika 1b:

$$E - I R_{in} = U_{AB} \quad (2)$$

gdje je:

$$I = I_1 + I_2 \quad (6,75 \text{ A}) \quad (3)$$

struja izvora paralelnog spoja,

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} \quad (= 4,5 \text{ A}) \quad , \quad I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} \quad (= 2,25 \text{ A}) \quad (4)$$

struje paralelnih grana.

Sustav (1) do (4) daje:

$$R_{\text{in}} = \frac{R_2^2}{R_1} \quad (=16\Omega) \quad (5)$$

Elektromotorna sila naponskog izvora, prema (2), jest: $E = 126\text{ V}$.



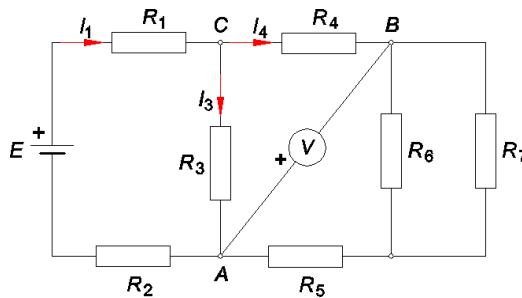
Primjer 12.39.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Ako voltmetar mjeri napon U_V između čvorova A - B , odredite:

- a) EMS naponskog izvora
- b) snagu naponskog izvora.

Podatci: $R_1 = R_4 = 4\Omega$, $R_2 = R_5 = 2\Omega$, $R_3 = R_6 = R_7 = 12\Omega$, $U_V = 16\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) EMS naponskog izvora (nakon načinjenog ekvivalentnog otpora mreže) jest:

$$E = I_1 R_e \quad (1)$$

gdje je:

- I_1 - struja izvora,
- R_e - ekvivalentni otpor mreže.

Određuje se struja izvora I_1 .

Struja I_1 , uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor C , jest:

$$I_1 = I_3 + I_4 \quad (2)$$

Uz zadani izmjereni napon U_V struja I_4 jest:

$$I_4 = \frac{U_V}{R_{e1}} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (3)$$

gdje je:

$$R_{e1} = R_5 + \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} \quad (= 8 \Omega) \quad (4)$$

ekvivalentni otpor mreže desno od čvorova A - B .

Paralelne grane između čvorova A - C imaju jednake otpore:

$$R_3 = R_4 + R_{e1} \quad (5)$$

odakle slijedi da je:

$$I_3 = I_4 \quad (= 2 \text{ A}).$$

Prema (2) jest: $I_1 = 4 \text{ A}$.

Ekvivalentni otpor mreže:

$$R_e = R_1 + R_2 + \frac{1}{2} R_3 \quad (= 12 \Omega) \quad (6)$$

Slijedi, prema (1), EMS naponskog izvora: $E = 48 \text{ V}$.

b) Snaga naponskog izvora, prema **(12.3)**, jest:

$$P = EI_1 \quad (= 192 \text{ W}) \quad (7)$$

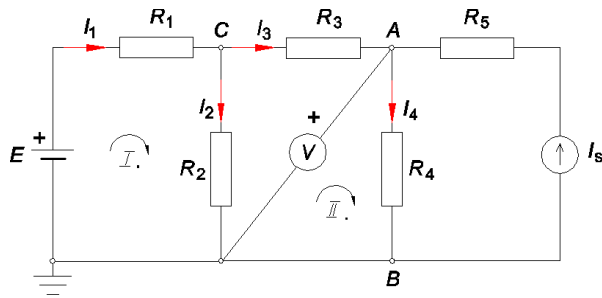


Primjer 12.40.

Za električnu mrežu čija je shema prikazana na slici 1 odredite EMS električnog izvora.

Podatci: $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $I_s = 4 \text{ A}$, $U_V = 14 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

EMS odredit će se uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju I.:

$$E = I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (1)$$

gdje je:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (2)$$

struja dobivena uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor C,

$$I_2 = \frac{I_3 R_3 + I_4 R_4}{R_2} \quad (= 5 \text{ A}) \quad (3)$$

struja određena uporabom Kirchhoffova zakona za petlju II.,

$$I_4 = \frac{U_V}{R_4} \quad (= 7 \text{ A}) \quad (4)$$

struja dobivena iz pokazivanja voltmetra,

$$I_3 = I_4 - I_s \quad (= 3 \text{ A}) \quad (5)$$

struja dobivena uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor A.

Napomena: Budući da je čvor A na većem potencijalu od čvora B (potencijal zemlje), struja I_4 teče od čvora A prema čvoru B.

Uvrštavanjem (4) i (5) u (2) dobije se $I_1 = 8 \text{ A}$, čime je tražena EMS, prema (1): $E = 60 \text{ V}$.

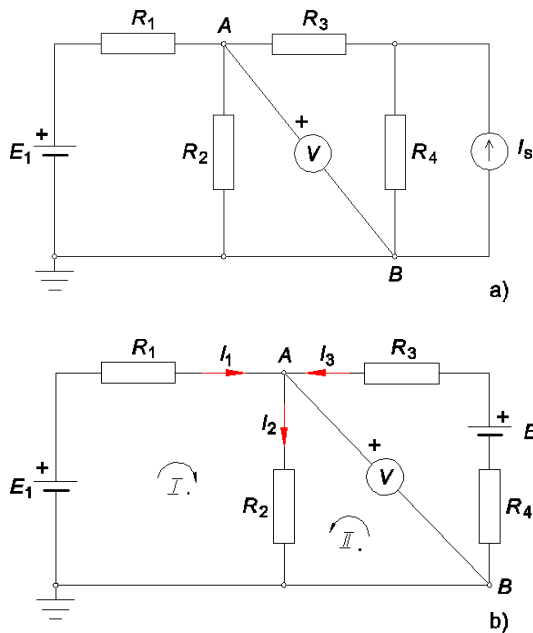


Primjer 12.41.

Za električnu mrežu čija je shema prikazana na slici 1a odredite:

- EMS naponskog izvora E_1
- snagu na otporu R_4 .

Podatci: $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $I_s = 6\text{ A}$, $U_V = 10\text{ V}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže a) i zamjena strujnog izvora naponskim b)

a) EMS izvora određuje se uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju I . (slika 1b):

$$E_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (1)$$

gdje je:

$$I_1 = I_2 - I_3 \quad (2)$$

struja dobivena uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor A ,

$$I_2 = \frac{U_V}{R_2} \quad (= 5\text{ A}) \quad (3)$$

struja dobivena iz pokazivanja voltmetra.

Struja I_3 određuje se uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju II. (slika 1b), uz prethodnu zamjenu strujnog izvora naponskim:

$$I_3 = \frac{E_2 - I_2 R_2}{R_3 + R_4} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (4)$$

gdje je prema (12.2):

$$E_2 = I_s R_4 \quad (= 24 \text{ V}) \quad (5)$$

EMS naponskog izvora (dobivena zamjenom strujnog izvora naponskim izvorom).

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) dobije se $I_1 = 3 \text{ A}$, čime je tražena *EMS*, prema (1), $E_1 = 28 \text{ V}$.

Napomena: Budući da je čvor *A* na većem potencijalu od čvora *B* (potencijal zemlje), struja I_2 teče od čvora *A* prema čvoru *B* (također potencijal zemlje).

b) Snaga na otporu R_4 , prema (11.4), jest:

$$P_4 = I_3^2 R_4 \quad (= 16 \text{ W}) \quad (6)$$



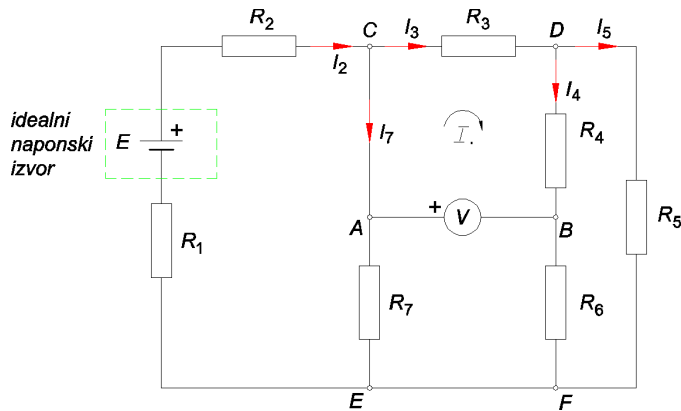
Primjer 12.42.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Voltmetar između čvorova *A-B* mjeri napon U_V . Pri proračunu voltmetar smatrajte idealnim. Odredite:

- a) snagu izvora
- b) pokazivanje voltmetra ako se idealni naponski izvor zamijeni idealnim strujnim izvorom, $E \rightarrow I_s$ (slika 2).

Podatci: $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_6 = 4 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$, $R_5 = 12 \Omega$, $R_7 = 10 \Omega$, $U_V = 16 \text{ V}$, $I_s = 12 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s naponskim izvorom

a) Snaga električnog izvora prema (12.3), jest:

$$P_{iz} = EI_2 = I_2^2 R_e \quad (1)$$

gdje je:

I_2 - struja izvora,

R_e - ekvivalentni otpor mreže.

Određuje se struja izvora. Uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvor C dobije se:

$$I_2 = I_3 + I_7 \quad (2)$$

Iz zadanih parametara električne mreže i sheme vidljivo je:

- budući da otpor voltmetra teži u beskonačnost, $R_V \rightarrow \infty$, nema galvanske povezanosti između čvorova A-B.
- paralelne grane mreže između čvorova D-F imaju jednake iznose otpora:

$$R_5 = R_4 + R_6 \quad (= 12 \Omega) \quad (3)$$

odakle slijedi i da su struje grana međusobno jednake: $I_4 = I_5$.

Za čvor D, uporabom I. Kirchhoffova zakona, dobije se:

$$I_3 = I_4 + I_5 = 2I_4 \quad (4)$$

Uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju I. dobije se:

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = U_V \quad (5)$$

Uvrštavanjem (4) u (5) dobije se:

$$I_3 = \frac{U_V}{R_3 + \frac{1}{2}R_4} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (6)$$

Desno od čvorova C-E ekvivalentni otpor mješovitog spoja jest:

$$R_{CE} = R_3 + \frac{(R_4 + R_6)R_5}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (= 10 \Omega) \quad (7)$$

Ekvivalentni otpor R_{CE} jednak je otporu R_7 . Slijedi struja $I_3 = I_7$.

Prema (2) dobije se struja izvora:

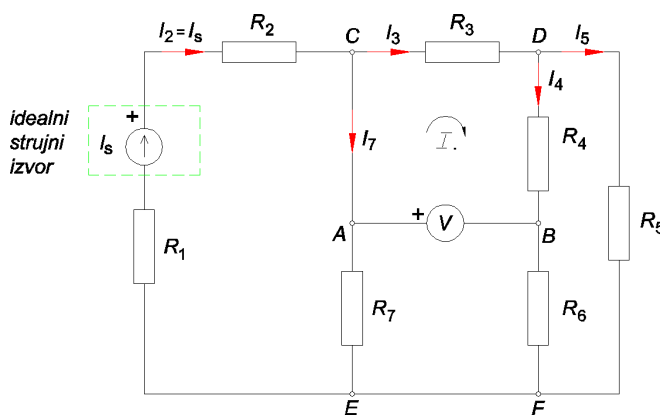
$$I_2 = 2I_3 \quad (= 4 \text{ A}) \quad (8)$$

Određuje se ekvivalentni otpor mreže:

$$R_e = R_1 + R_2 + \frac{R_7 R_{CE}}{R_7 + R_{CE}} \quad (= 11 \Omega) \quad (9)$$

Prema (1) snaga izvora jest: $P_{iz} = 176 \text{ W}$.

b) Ako se idealni naponski izvor zamijeni idealnim strujnim, shema mreže sa slike 1 postaje:



Sl. 2. Shema električne mreže sa strujnim izvorom

Pokazivanje voltmetra, prema (5), jest:

$$U_V = I_3 R_3 + I_4 R_4$$

Za $I_2 = I_s = 12 \text{ A}$, prema (4) i (8) dobije se: $I_3 = 6 \text{ A}$ i $I_4 = 3 \text{ A}$.

Pokazivanje voltmetra jest: $U_V = 48 \text{ V}$.



Primjer 12.43.

Elektromehaničarska radionica pored rasvjete od 12 žarulja pojedinačne snage P_z ima i 5 istosmjernih elektromotora pojedinačne snage P_m i stupnja iskorištenja η_m .

Ako je radionica priključena na napon U_n , odredite potrebne osigurače za zaštitu trošila tako da postoji posebni strujni krug za rasvjetu te posebni strujni krug za elektromotore.

Na raspolaganju imate: osigurače za rasvjetu od 6 i 10 A te osigurače za elektromotore od 20, 25 i 30 A.

Podatci: $P_z = 150 \text{ W}$, $P_m = 800 \text{ W}$, $U_n = 220 \text{ V}$, $\eta_m = 0,85$.

Rješenje

a) Struja rasvjetnog strujnog kruga jest:

$$I = \frac{P_{\text{zuk}}}{U_n} \quad (= 8,18 \text{ A})$$

gdje je:

$$P_{\text{zuk}} = 12P_z \quad (= 1800 \text{ W})$$

ukupna snaga žarulja.

Bira se osigurač od 10 A (prvi veći od izračunate struje).

b) Struja industrijskog strujnog kruga jest:

$$I = \frac{P_{\text{muk}}}{U_n} \quad (= 21,39 \text{ A})$$

gdje je:

$$P_{\text{muk}}^* = 5 \frac{P_m}{\eta_m} \quad (= 4705,88 \text{ W})$$

ukupna snaga motora.

Bira se osigurač od 25 A (prvi veći od izračunate struje).

Napomena: P_{muk}^* - Snaga motora jest snaga na osovini. Ukupna snaga je veća za gubitke.

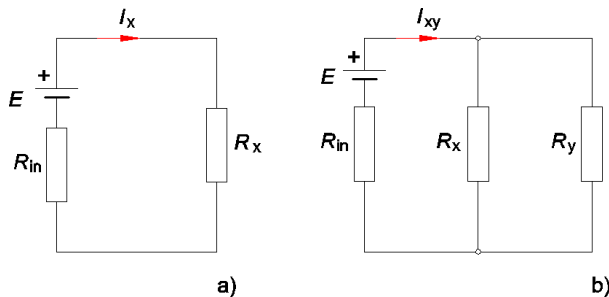


Primjer 12.44.

Pod kojim uvjetima naponski izvor EMS E i unutarnjeg otpora R_{in} daje jednaku snagu trošilu otpora R_x (slika 1a), kao i trošilu koje nastaje ako se trošilu otpora R_x priključi paralelno trošilo otpora R_y (slika 1b). Komentirajte rezultate.

Napomena: traži se $R_y = f(R_x)$.

Rješenje



Sl. 1. Trošilu otpora R_x a) priključeno je paralelno trošilo otpora R_y b)

Iz zahtjeva zadatka, snaga na trošilima mora biti jednaka:

$$P_x = P_{xy} \quad (1)$$

gdje je:

$$P_x = I_x^2 R_x \quad (2)$$

snaga trošila (slika 1a),

$$P_{xy} = I_{xy}^2 R_{xy} \quad (3)$$

snaga trošila (slika 1b),

$$R_{xy} = \frac{R_x R_y}{R_x + R_y} \quad (4)$$

ekvivalentni otpor paralelnog spoja trošila.

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobije se:

$$I_x^2 R_x = I_{xy}^2 R_{xy} \quad (5)$$

gdje je:

$$I_x = \frac{E}{R_{in} + R_x} \quad (6)$$

struja izvora (slika 1a),

$$I_{xy} = \frac{E}{R_{in} + R_{xy}} \quad (7)$$

struja izvora (slika 1b).

Uvrštavanjem (6) i (7) u (5) dobije se:

$$\frac{E^2}{(R_{in} + R_x)^2} R_x = \frac{E^2}{(R_{in} + R_{xy})^2} R_{xy} \quad (8)$$

Sređivanjem (8), koristeći (4), dobije se:

$$R_{in}^2 R_x + R_{in}^2 R_y - R_x^2 R_y = 0 \quad (9)$$

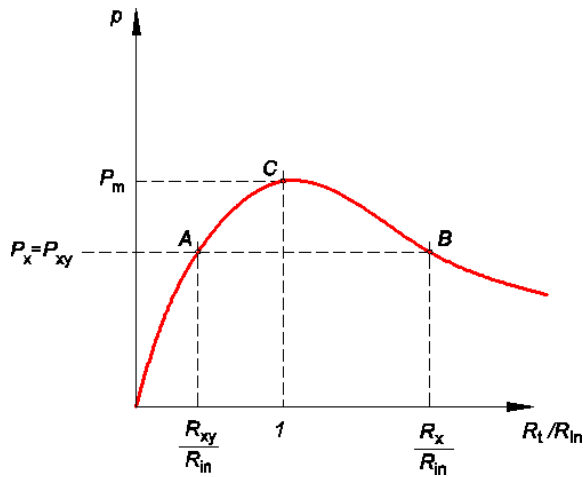
odakle je:

$$R_y = \frac{R_{in}^2 R_x}{R_x^2 - R_{in}^2} \quad (10)$$

ili u obliku:

$$\frac{R_y}{R_{in}} = \frac{\frac{R_x}{R_{in}}}{\left(\frac{R_x}{R_{in}}\right)^2 - 1} \quad (11)$$

Na slici 2 prikazana je ovisnost snage trošila u ovisnosti kvocijenta R_t/R_{in} .



Sl. 2. Snaga ima maksimalni iznos za $R_t/R_{in}=1$

Pravac $p = P_x = P_{xy}$ siječe krivulju $p = f(R_t / R_{in})$ u dvije točke: A i B (slika 2). Budući da (10) ima smisla samo ako je $R_x > R_{in}$, slijedi da je snaga P_x određena točkom B . Slijedom navedenog, snaga P_{xy} određena je točkom A . Točka C određuje maksimalnu snagu.

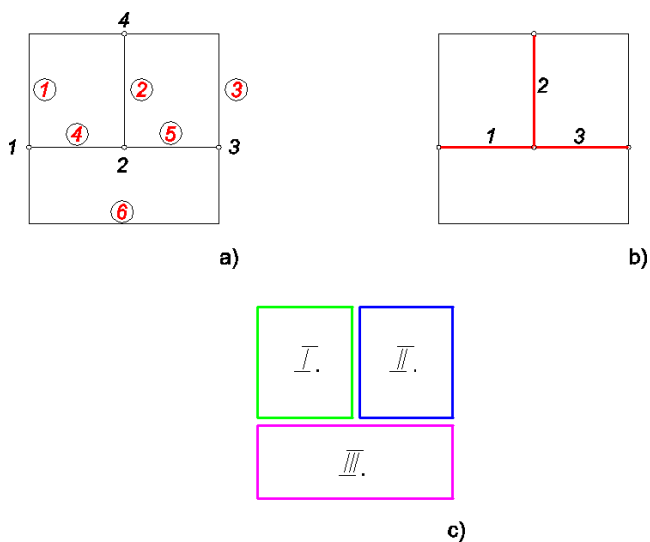


13. LINEARNE ELEKTRIČNE MREŽE ISTOSMJERNE STRUJE

Metode i teoremi

Uvod

Ako električna mreža ima n_g grana (= **6**) i $n_č$ čvorova (= **4**), (slika 1a), tada ona ima (- detaljno vidi odjeljak 17.3 II. Sveska):



Sl. 13.1 Graf sheme električne mreže a), zavisne grane (stablo) mreže b) i nezavisne petlje c)

$$n_z = n_č - 1 \quad (= 3) \quad (13.1)$$

zavisnih grana (slika 1b), i

$$n_{np} = n_g - n_z = n_g - (n_č - 1) \quad (= 3) \quad (13.2)$$

nezavisnih petlji (slika 1c).

13.1. Primjena Kirchhoffovih zakona

I. i II. Kirchhoffov zakon, zakon čvora, odnosno petlje, prema (11.6) i (11.7) glase:

$$\text{zakon čvora:} \quad \text{alg} \sum_k I_k = 0 \quad (13.3)$$

$$\text{zakon petlje:} \quad \text{alg} \sum_i E_i = \text{alg} \sum_k I_k R_k \quad (13.4)$$

Za riješiti električnu mrežu sa n_g grana, primjenom metode Kirchhoffovih zakona, nužno je imati isto toliko jednačbi. Potreban broj jednačbi jednak je zbroju jednačbi dobijenih:

- uporabom I. Kirchhoffova zakona

$$n_I = n_{\check{c}} - 1 \quad (13.5)$$

- uporabom II. Kirchhoffova zakona

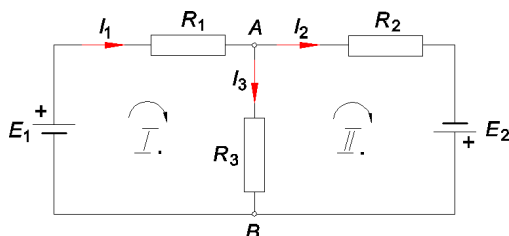
$$n_{II} = n_g - (n_{\check{c}} - 1) \quad (13.6)$$

Primjer 13.1.1.

Za shemu električne mreže (slika 1) uporabom Kirchhoffovih zakona, odredite struje u svim njezinim granama.

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{V}$, $E_2 = 12\text{V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Zadana električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_g = 3 \text{ grane}$$

$$n_{np} = 2 \text{ nezavisne petlje}$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona može se načiniti $n_{\check{c}} - 1 = 1$ jednadžba, dok se uporabom II. Kirchhoffova zakona može načiniti $n_{np} = 2$ jednadžbe. Za pretpostavljene smjerove struja i smjerove obilaska petlji dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad I_1^* - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (2)$$

$$\text{petlja } II.: \quad E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (3)$$

Rješenje sustava (1), (2) i (3) daje: $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$.

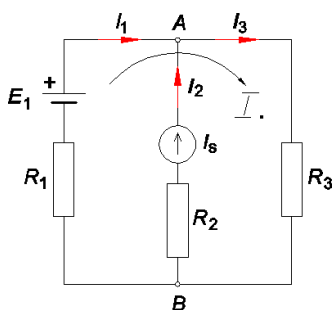


Primjer 13.1.2.

Schema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite struje u svim granama.

Podatci: $E_1 = 48 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $I_s = 10 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Zadana električna mreža (slika 1) ima:

* Dogovorno se uzima da je struja koja ulazi u čvor pozitivna, a struja koja izlazi iz čvora negativna.

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_g = 3 \text{ grane}$$

$$n_{np} = 2 \text{ nezavisne petlje}$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona može se načiniti $n_{\check{c}} - 1 = 1$ jednažba, dok se uporabom II. Kirchhoffova zakona može načiniti $n_{np} = 2$ jednažbe.

Budući da je struja I_2 određena strujom strujnog izvora:

$$I_2 = I_s \quad (1)$$

(to će se) uporabom II. Kirchhoffova zakona umjesto dvije napisat će se samo jedna jednažba. Za pretpostavljene smjerove struja i smjerove obilaska petlji dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad I_1 + I_s - I_3 = 0 \quad (2)$$

$$\text{petlja } I: \quad E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (3)$$

Sustav (2) i (3) daje: $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_3 = 12 \text{ A}$.

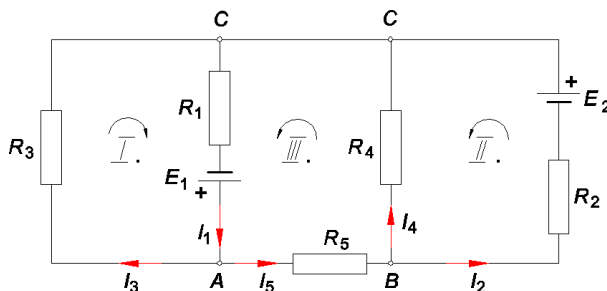


Primjer 13.1.3.

Za shemu električne mreže prikazane na slici 1 odredite struje u svim granama.

Podatci: $R_1 = R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$, $E_1 = 45 \text{ V}$, $E_2 = 28 \text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Zadana električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\text{č}} = 3 \text{ čvora}$$

$$n_{\text{g}} = 5 \text{ grana}$$

$$n_{\text{np}} = 3 \text{ nezavisne petlje}$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona može se načiniti $n_{\text{č}} - 1 = 2$ jednačbe, dok se uporabom II. Kirchhoffova zakona može načiniti $n_{\text{np}} = 3$ jednačbe. Za pretpostavljene smjerove struja i smjerove obilaska petlji dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad I_1 - I_3 - I_5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{čvor } B: \quad I_5 - I_2 - I_4 = 0 \quad (2)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad (3)$$

$$\text{petlja } II.: \quad E_2 = I_2 R_2 - I_4 R_4 \quad (4)$$

$$\text{petlja } III.: \quad E_1 = I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_5 R_5 \quad (5)$$

Sustav (1) do (5) daje:

$$I_1 = 13,28 \text{ A}, \quad I_2 = 10,2 \text{ A}, \quad I_3 = 4,61 \text{ A}, \quad I_4 = -1,52 \text{ A}, \quad I_5 = 8,68 \text{ A}.$$

Predznak minus za struju I_4 ukazuje da je njezin smjer pogrešno pretpostavljen.

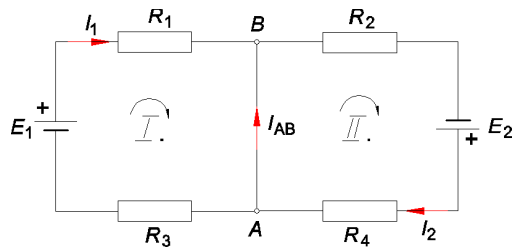


Primjer 13.1.4.

Primjenom Kirchhoffovih zakona odredite struju grane $A-B$ za električnu mrežu čija je shema prikazana na slici 1.

Podatci: $E_1 = 16 \text{ V}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Zadana električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\text{č}} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_{\text{g}} = 3 \text{ grane}$$

$$n_{\text{np}} = 2 \text{ nezavisne petlje}$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona može se načiniti $n_{\text{č}} - 1 = 1$ jednažba, dok se uporabom II. Kirchhoffova zakona može načiniti $n_{\text{np}} = 2$ jednažbe. Za pretpostavljene smjerove struja i smjerove obilaska petlji dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad -I_1 + I_2 - I_{AB} = 0 \quad (1)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_1 = I_1(R_1 + R_3) \quad (2)$$

$$\text{petlja } II.: \quad E_2 = I_2(R_2 + R_4) \quad (3)$$

Sustav (1) do (3) daje: $I_{AB} = 1 \text{ A}$.

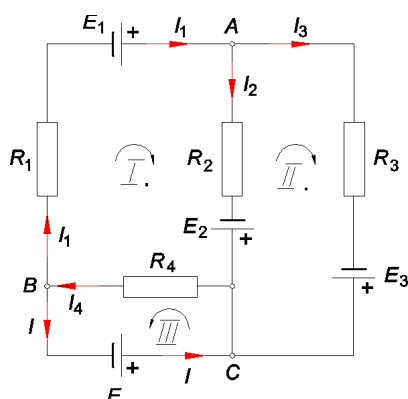
**Primjer 13.1.5.**

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite struju naponskog izvora E .

Podatci: $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 40 \text{ V}$, $E_3 = 10 \text{ V}$, $E = 20 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$,

$R_2 = 2R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim izvorom

Zadana električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 3 \text{ \check{c}vora}$$

$$n_g = 5 \text{ grana}$$

$$n_{np} = 3 \text{ nezavisne petlje}$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona može se načiniti $n_{\check{c}} - 1 = 2$ jednadžbe, dok se uporabom II. Kirchhoffova zakona može načiniti $n_{np} = 3$ jednadžbe. Za pretpostavljene smjerove struja i smjerove obilaska petlji dobije se:

$$\text{\check{c}vor } A: \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{\check{c}vor } B: \quad -I_1 - I + I_4 = 0 \quad (2)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_1 + E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_4 R_4 \quad (3)$$

$$\text{petlja } II.: \quad E_3 - E_2 = -I_2 R_2 + I_3 R_3 \quad (4)$$

$$\text{petlja } III.: \quad E = I_4 R_4 \quad (5)$$

Rješenje sustava jednadžbi (1) do (5) daje. $I_1 = 2,42 \text{ A}$.

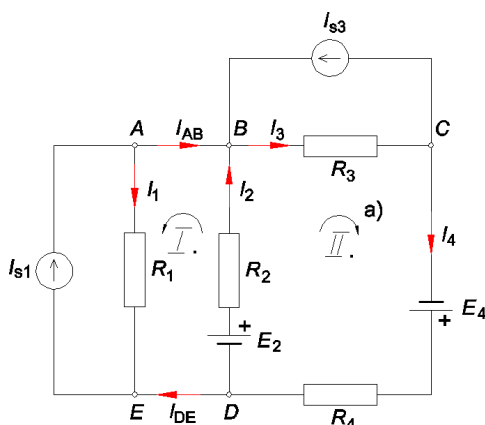
Struje ostalih grana iznose: $I_1 = 2,58 \text{ A}$, $I_2 = 1,86 \text{ A}$, $I_3 = 0,72 \text{ A}$, $I_4 = 5 \text{ A}$.



Primjer 13.1.6.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite jakost struje u svim granama električne mreže.

Podatci: $I_{S1} = 2\text{ A}$, $E_2 = 150\text{ V}$, $I_{S3} = 0,5\text{ A}$, $E_4 = 25\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 100\Omega$,
 $R_3 = 25\Omega$, $R = 50\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Električna mreža sadrži naponske i strujne izvore

Zadana električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 5 \text{ čvorova}$$

$$n_g = 6 \text{ grana}$$

$$n_{np} = 2 \text{ nezavisne petlje}$$

Uporabom I. Kirchhoffova zakona može se načiniti $n_{\check{c}} - 1 = 4$ jednadžbe, dok se uporabom II. Kirchhoffova zakona može načiniti $n_{np} = 2$ jednadžbe. Za pretpostavljene smjerove struja i smjerove obilaska petlji dobije se:

$$\text{čvor A:} \quad I_{S1} - I_1 - I_{AB} = 0 \quad (1)$$

$$\text{čvor B:} \quad I_{AB} + I_2 + I_{S3} - I_3 = 0 \quad (2)$$

$$\text{čvor C:} \quad I_3 - I_{S3} - I_4 = 0 \quad (3)$$

$$\text{čvor } E: \quad I_{DE} + I_1 - I_{s1} = 0 \quad (4)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_2 = I_2 R_2 + I_1 R_1 \quad (5)$$

$$\text{petlja } II.: \quad E_2 + E_4 = I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 \quad (6)$$

Rješenje sustava (1) do (6) daje:

$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 0,5 \text{ A}, \quad I_3 = 2 \text{ A}, \quad I_4 = 1,5 \text{ A}, \quad I_{AB} = 1 \text{ A}, \quad I_{DE} = 1 \text{ A}.$$

Uputa za rješavanje: Iz (1) i (2) odredite struju I_1 (eliminirajte I_{AB}). Dobivenu struju uvrstite u (5). Iz (3) odredite struju I_4 i uvrstite u (6). Dobili ste dvije jednačbe s dvije nepoznanice.



13.2. Metoda konturnih struja

Prema (17.24) naponska jednačba bilo koje petlje mreže jest:

$$I_k R_{kk} \pm \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^n I_j R_{kj} = E_{kk} \quad (13.7)$$

gdje je:

n - broj konturnih struja,

I_k - struja k -te konture,

I_j - struja j -te konture,

R_{kk} - zbroj otpora k -te konture,

R_{kj} - zbroj otpora zajedničke grane k -te i j -te konture,

E_{kk} - algebarski zbroj EMS-a k -te konture.

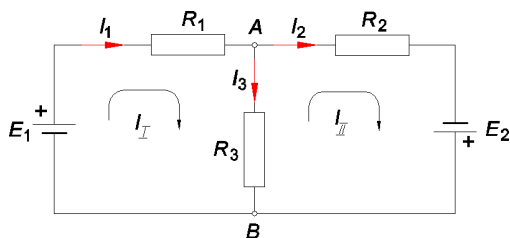
Smjer obilaženja konturne petlje mora se podudarati sa smjerom konturne struje I_k . E_{kk} se uzima pozitivan ako je u smjeru obilaženja konture. Umnožak $I_j R_{kj}$ može biti pozitivan ili negativan ovisno o tome teku li struje I_k i I_j kroz R_{kj} u istom ili suprotnom smjeru.

Primjer 13.2.1.

Za shemu električne mreže (slika 1) metodom konturnih struja odredite struju u svim njezinim granama (primjer 13.1.1.).

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{V}$, $E_2 = 12\text{V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\xi} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_g = 3 \text{ grane}$$

$n_{np} = 2$ nezavisne petlje

Za ucrtane smjerove konturnih struja I_I i I_{II} (slika 1) i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja } I.: \quad E_1 = I_I(R_1 + R_3) - I_{II}R_3 \quad (1)$$

$$\text{petlja } II.: \quad E_2 = I_{II}(R_2 + R_3) - I_I R_3 \quad (2)$$

Sustav (1) i (2) daje: $I_I = 5 \text{ A}$, $I_{II} = 3 \text{ A}$.

Struje grana jesu:

$$I_1 = I_I \quad (= 5 \text{ A})$$

$$I_2 = I_{II} \quad (= 3 \text{ A})$$

$$I_3 = I_I - I_{II} \quad (= 2 \text{ A})$$

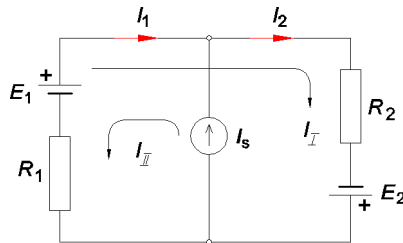


Primjer 13.2.2.

Odredite struje u granama električne mreže čija je shema prikazana na slici 1.

Podatci: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $I_s = 5 \text{ A}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim strujnim izvorom

Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ \u010d}vora$$

$$n_g = 3 \text{ grane}$$

$n_{np} = 2$ nezavisne petlje

Za ucrtane smjerove konturnih struja (slika 1) i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja I.:} \quad I_{\text{I}}(R_1 + R_2) - I_{\text{II}}R_1 = E_1 + E_2 \quad (1)$$

$$\text{petlja II.:} \quad I_{\text{II}} = I_s = 5 \text{ A} \quad (2)$$

Sustav (1) i (2) daje: $I_{\text{I}} = 9 \text{ A}$.

Struje grana iznose:

$$I_1 = I_{\text{I}} - I_{\text{II}} \quad (= 4 \text{ A})$$

$$I_2 = I_{\text{I}} \quad (= 9 \text{ A})$$

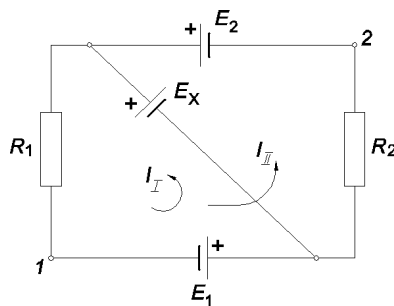
❖ ❖ ❖

Primjer 13.2.3.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite nepoznati izvor E_x tako da točke 1 i 2 budu na jednakom potencijalu.

Podatci: $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_g = 3 \text{ grane}$$

$n_{np} = 2$ nezavisne petlje

Za ucrtane smjerove konturnih struja, slika 1, i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja I:} \quad I_{\text{I}}R_1 + I_{\text{II}}R_1 = E_1 + E_x \quad (1)$$

$$\text{petlja II:} \quad I_{\text{I}}R_1 + I_{\text{II}}(R_1 + R_2) = E_1 + E_2 \quad (2)$$

$$\text{uvjetna jednađžba:} \quad \varphi_1 + E_1 - I_{\text{II}}R_2 = \varphi_2 \quad (3)$$

Sustav (2) i (3) daje: $I_{\text{I}} = 10 \text{ A}$, $I_{\text{II}} = 5 \text{ A}$.

Iz (1) dobije se: $E_x = 10 \text{ V}$.



Primjer 13.2.4.

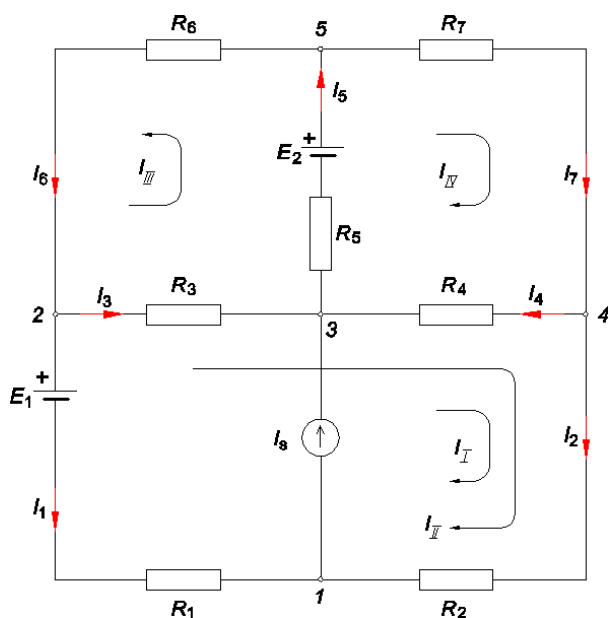
Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite:

a) struje u svim granama mreže

b) razliku potencijala na čvorovima strujnog izvora $U_s = U_{31}$.

Podatci: $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 48 \text{ V}$, $I_s = 60 \text{ mA}$, $R_1 = 2R_2 = R_7 = 400 \Omega$,
 $R_4 = 5R_5 = 1000 \Omega$, $R_3 = 300 \Omega$, $R_6 = 280 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\zeta} = 5 \text{ čvorova}$$

$$n_g = 8 \text{ grana}$$

$$n_{np} = 4 \text{ nezavisne petlje}$$

Za ucrtane smjerove konturnih struja (slika 1) i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja I.:} \quad I_1 = I_s \quad (= 60 \text{ mA}) \quad (1)$$

$$\text{petlja II.:} \quad E_1 = I_1(R_2 + R_4) + I_{II}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + I_{III}R_3 - I_{IV}R_4 \quad (2)$$

$$\text{petlja III.:} \quad E_2 = I_{II}R_3 + I_{III}(R_3 + R_5 + R_6) + I_{IV}R_5 \quad (3)$$

$$\text{petlja IV.:} \quad E_2 = -I_1R_4 - I_{II}R_4 + I_{III}R_5 + I_{IV}(R_4 + R_5 + R_7) \quad (4)$$

Sustav (1) do (4) daje: $I_1 = I_s = 60 \text{ mA}$, $I_{II} = -20 \text{ mA}$, $I_{III} = 50 \text{ mA}$,
 $I_{IV} = 45 \text{ mA}$.

Struje grana jesu:

$$I_1 = -I_{II} \quad (= 20 \text{ mA}) \quad , \quad I_2 = I_1 + I_{II} \quad (= 40 \text{ mA}),$$

$$I_3 = I_{II} + I_{III} \quad (= 30 \text{ mA}) \quad , \quad I_4 = I_{IV} - (I_1 + I_{II}) \quad (= 5 \text{ mA}),$$

$$I_5 = I_{III} + I_{IV} \quad (= 95 \text{ mA}) \quad , \quad I_6 = I_{III} \quad (= 50 \text{ mA}) \quad , \quad I_7 = I_{IV} \quad (= 45 \text{ mA}).$$

b) Razlika potencijala U_{31} jest:

$$U_{31} = I_2R_2 - I_4R_4 \quad (= 3 \text{ V}).$$

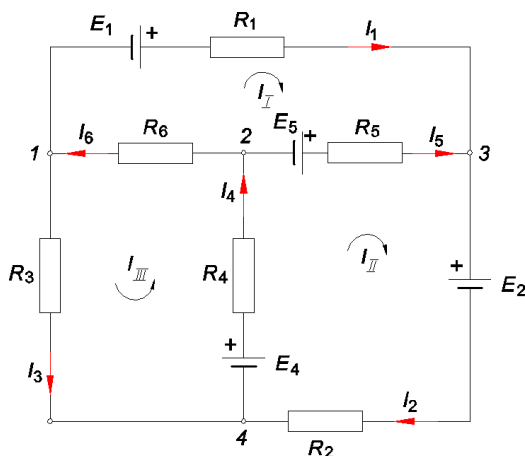


Primjer 13.2.5.

Za shemu električne mreže (slika 1) metodom konturnih struja odredite struje u svim njezinim granama.

Podatci: $R_1 = 0,4\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 1\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 2\Omega$,

$E_1 = 13\text{ V}$, $E_2 = 3\text{ V}$, $E_4 = 14\text{ V}$, $E_5 = 8\text{ V}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Električna mreža, slika 1, ima:

$$n_{\check{c}} = 4 \text{ \u010d}vora$$

$$n_g = 6 \text{ grana}$$

$$n_{np} = 3 \text{ nezavisne petlje}$$

Za ucrtane smjerove konturnih struja, I_I , I_{II} , I_{III} (slika 1) i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja I.:} \quad E_1 - E_5 = I_I(R_1 + R_5 + R_6) - I_{II}R_5 + I_{III}R_6 \quad (1)$$

$$\text{petlja II.:} \quad -E_2 + E_4 + E_5 = -I_I R_5 + I_{II}(R_2 + R_4 + R_5) + I_{III}R_4 \quad (2)$$

$$\text{petlja III.:} \quad E_4 = I_I R_6 + I_{II}R_4 + I_{III}(R_3 + R_4 + R_6) \quad (3)$$

Sustav (1), (2) i (3) daje: $I_I = 2,5\text{ A}$, $I_{II} = 3\text{ A}$, $I_{III} = 1\text{ A}$.

Struje grana 1, 2 i 3 jednake su konturnim strujama I_I , I_{II} i I_{III} :

$$I_1 = I_I \quad (= 2,5 \text{ A}) \quad , \quad I_2 = I_{II} \quad (= 4 \text{ A}) \quad , \quad I_3 = I_{III} \quad (= 1 \text{ A})$$

Preostale struje grana jesu:

$$I_4 = I_{II} + I_{III} \quad (= 4 \text{ A}), \quad I_5 = I_{II} - I_I \quad (= 0,5 \text{ A}), \quad I_6 = I_I + I_{III} \quad (= 3,5 \text{ A})$$



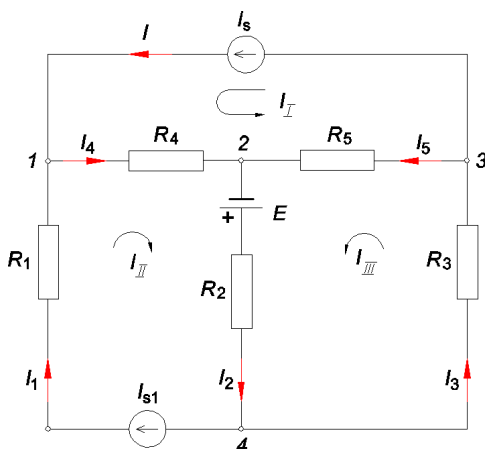
Primjer 13.2.6.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Uporabom metode konturnih struja odredite:

- struje u svim granama mreže
- razliku potencijala među svim čvorovima.

Podatci: $E = 12 \text{ V}$, $I_{s1} = I_s = 1 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_c = 4 \text{ čvora}$$

$$n_g = 6 \text{ grana}$$

$$n_{np} = 3 \text{ nezavisne petlje}$$

Za ucrtane smjerove konturnih struja (slika 1) i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja } I.: \quad I_{\text{I}} = I_{\text{s}} \quad (=1\text{ A}) \quad (1)$$

$$\text{petlja } I_{\text{I}}.: \quad I_{\text{II}} = I_{\text{s1}} \quad (=1\text{ A}) \quad (2)$$

$$\text{petlja } I_{\text{III}}.: \quad E = -I_{\text{I}}R_5 + I_{\text{II}}R_2 + I_{\text{III}}(R_2 + R_3 + R_5) \quad (3)$$

Iz (3) dobije se:

$$I_{\text{III}} = \frac{E + I_{\text{I}}R_5 - I_{\text{II}}R_2}{R_2 + R_3 + R_5} \quad (=4\text{ A}) \quad (4)$$

Struje grana, prema slici 1, jesu:

$$I = I_{\text{I}} = I_{\text{s}} \quad (=1\text{ A}), \quad I_1 = I_{\text{II}} = I_{\text{s1}} \quad (=1\text{ A}), \quad I_2 = I_{\text{II}} + I_{\text{III}} \quad (=5\text{ A}),$$

$$I_3 = I_{\text{III}} \quad (=4\text{ A}), \quad I_4 = I_{\text{I}} + I_{\text{II}} \quad (=2\text{ A}), \quad I_5 = I_{\text{III}} - I_{\text{I}} \quad (=3\text{ A}).$$

b)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = I_4 R_4 \quad (=2\text{ V}) \quad , \quad U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 = -I_5 R_5 \quad (= -3\text{ V})$$

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = I_4 R_4 - I_5 R_5 \quad (= -1\text{ V}) \quad , \quad U_{34} = \varphi_3 - \varphi_4 = -I_3 R_3 \quad (= -4\text{ V})$$

$$U_{24} = I_2 R_2 - E \quad (= -7\text{ V}) \quad , \quad U_{14} = \varphi_1 - \varphi_4 = I_4 R_4 + I_2 R_2 - E \quad (= -5\text{ V})$$

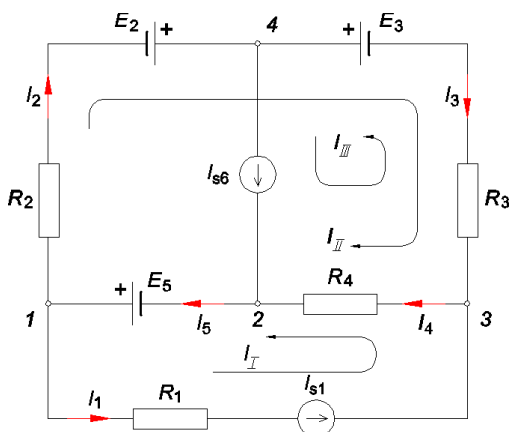


Primjer 13.2.7.

Odredite struje u svim granama električne mreže čija je shema prikazana na slici 1.

Podatci: $E_2 = 20\text{ V}$, $E_3 = 30\text{ V}$, $E_5 = 10\text{ V}$, $I_{\text{s1}} = 5\text{ A}$, $I_{\text{s6}} = 2\text{ A}$, $R_1 = 10\Omega$,
 $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 4\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 4 \text{ čvora}$$

$$n_g = 6 \text{ grana}$$

$$n_{np} = 3 \text{ nezavisne petlje}$$

Za ucrtane smjerove konturnih struja (slika 1) i (13.7), dobije se:

$$\text{petlja I.:} \quad I_1 = I_{s1} \quad (= 5 \text{ A}) \quad (1)$$

$$\text{petlja II.:} \quad E_2 - E_3 + E_5 = I_1 R_4 + I_{II} (R_2 + R_3 + R_4) - I_{III} (R_3 + R_4) \quad (2)$$

$$\text{petlja III.:} \quad I_{III} = I_{s6} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (3)$$

Sustav (1), (2) i (3) daje: $I_{II} = -1 \text{ A}$.

Struje grana jesu: $I_1 = I_1 \quad (= 5 \text{ A})$, $I_2 = I_{II} \quad (= -1 \text{ A})$, $I_3 = I_{II} - I_{III} \quad (= -3 \text{ A})$

$$I_4 = I_1 + I_{II} - I_{III} \quad (= 2 \text{ A}), \quad I_5 = I_1 + I_{II} \quad (= 4 \text{ A})$$



13.3. Metoda superpozicije

Metoda superpozicije omogućuje proračun struje I_k k -te grane zbrajanjem pojedinačnih struja svakog izvora (naponskog ili strujnog). Prema (17.29) dobije se:

$$I_k = G_{1k}E_1 + G_{2k}E_2 + \dots + G_{jk}E_j + \dots + I_{s1k} + I_{s2k} + \dots \quad (13.8)$$

gdje je:

- G_{jk} - vodljivost električne mreže, gledano sa stezaljki j -tog izvora, pri čemu su svi naponski izvori kratko spojeni, a strujni izvori odspojeni, dakako izuzev j -tog izvora,
- E_j - j - ti naponski izvor,
- I_{sk} - k - ti strujni izvor.

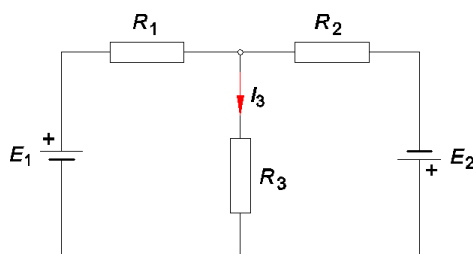
Jednostavnije kazano struja k -te grane I_k jednaka je algebarskom zbroju struja I_{kj} što ih daje svaki pojedini j -ti izvor. Struja I_{kj} ima pozitivan predznak ako teče u smjeru struje I_k .

Primjer 13.3.1.

Za shemu električne mreže (slika 1) uporabom metode superpozicije odredite struju kroz otpor R_3 .

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

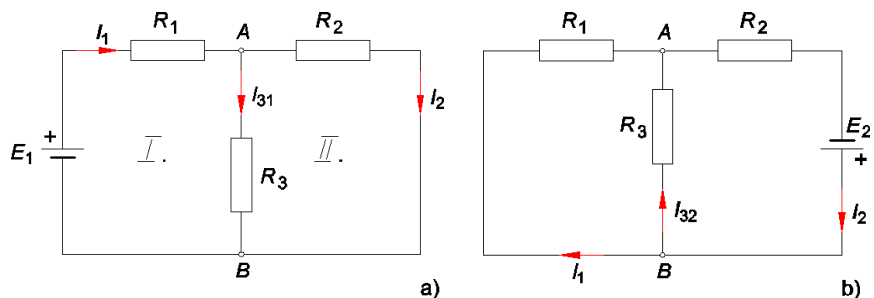
Struja kroz otpor R_3 , prema (13.8) jest:

$$I_3 = G_{13}E_1 + G_{23}E_2 \quad (1)$$

ili prema slici 2 u obliku:

$$I_3 = I_{31} - I_{32} \quad (2)$$

Struje I_{31} i I_{32} određuju se jednom od metoda (uporabom Kirchhoffovih zakona ili metodom konturnih struja). Struje I_{31} i I_{32} odredit će se iz dva koraka: naponski izvor E_1 jest aktivan (izvor E_2 prespojen), slika 2a, i naponski izvor E_2 jest aktivan (izvor E_1 prespojen), slika 2b.



Sl. 2. Jedan po jedan izvor je „aktivan“

a) Naponski izvor E_1 jest aktivan.

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad (= 4,33 \text{ A}) \quad (3)$$

za čvor A :

$$I_1 = I_{31} + I_2 \quad (4)$$

djelitelj struje za petlju II :

$$\frac{I_2}{I_{31}} = \frac{R_3}{R_2} \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) u (4) dobije se:

$$I_{31} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1 \quad (= 2,89 \text{ A}) \quad (6)$$

gdje je: I_1 struja izvora E_1 dana sa (3).

b) Naponski izvor E_2 jest aktivan.

Identičnim postupkom dobije se:

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \quad (= 1,56 \text{ A}) \quad (7)$$

$$I_{32} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} I_2 \quad (= 0,89 \text{ A}) \quad (8)$$

Prema slici 2a i 2b jest:

$$I_3 = I_{31} - I_{32} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (9)$$

Napomena: Struja I_{31} ima pozitivan predznak jer teče u smjeru struje I_3 , a I_{32} negativan predznak jer teče u suprotnom smjeru.



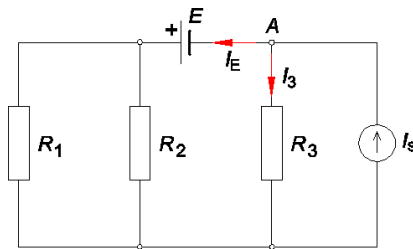
Primjer 13.3.2.

Uporabom metode superpozicije odredite struju:

- a) u grani s naponskim izvorom i grani s otporom R_3
- b) snagu razvijenu na otporu R_3 .

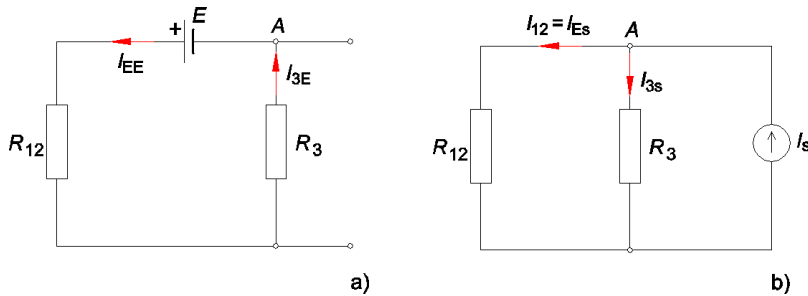
Podatci: $E = 18 \text{ V}$, $I_s = 4,5 \text{ A}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Električna mreža s idealnim strujnim i naponskim izvorom

Struje I_E i I_3 odredit će se iz dva koraka: naponski izvor „aktivan“ (strujni izvor odspojen), slika 2a, i strujni izvor „aktivan“ (naponski izvor prespojen), slika 2b.



Sl. 2. Strujni izvor je odspojen a), naponski izvor je prespojen b)

a1) naponski izvor E jest aktivan (slika 2a).

$$I_{EE} = I_{3E} = \frac{E}{R_{12} + R_3} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (1)$$

gdje je:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 6 \Omega) \quad (2)$$

paralelni spoj otpora R_1 i R_2 .

a2) strujni izvor I_s jest aktiviran, slika 2b.

$$\text{čvor } A: \quad I_s = I_{3s} + I_{Es} \quad (3)$$

$$\text{strujni djeljitelj:} \quad \frac{I_{Es}}{I_{3s}} = \frac{R_3}{R_{12}} \quad (4)$$

Rješenjem sustava (3) i (4) dobije se:

$$I_{3s} = \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} I_s \quad (= 3 \text{ A})$$

Iz (3) dobije se: $I_{Es} = 1,5 \text{ A}$.

Prema smjerovima struja sa slika 2a i 2b jest:

$$I_E = I_{EE} + I_{Es} \quad (= 3,5 \text{ A})$$

$$I_3 = I_{3s} - I_{3E} \quad (= 1 \text{ A})$$

b) Prema Joulovu zakonu (11.4) vrijedi:

$$P = I_3^2 R_3 \quad (= 3 \text{ W})$$

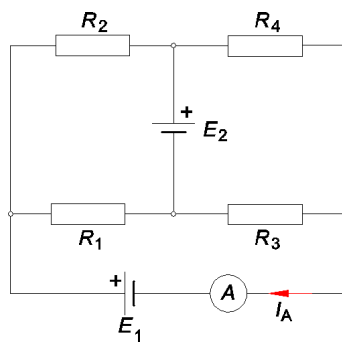


Primjer 13.3.3.

Zadana je električna mreža čija je shema prikazana na slici 1. Uporabom metode superpozicije odredite struju kroz ampermetar.

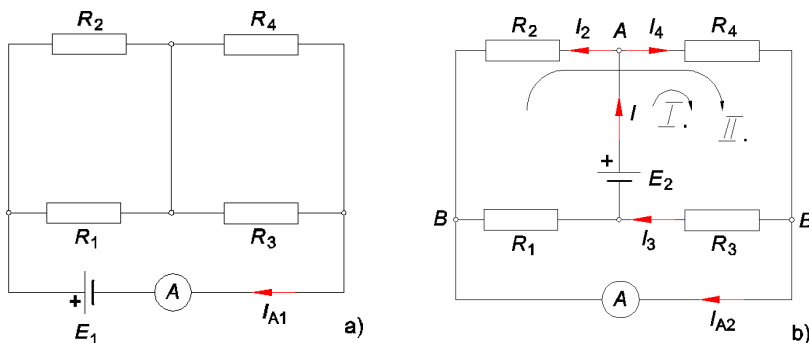
Podatci: $E_1 = 28 \text{ V}$, $E_{21} = 35 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 200 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_4 = 300 \Omega$

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim naponskim izvorima

Budući da električna mreža sadrži dva električna izvora, rješenje se dobije iz dva koraka:



Sl. 2. Zbroj struja $I_{A1} + I_{A2}$ dat će struju ampermetra

Struja kroz ampermetar jest:

$$I_A = I_{A1} + I_{A2} \quad (1)$$

a) Naponski izvor E_1 jest aktivan (slika 2a).

$$I_{A1} = \frac{E_1}{R_e} \quad (= 0,15 \text{ A}) \quad (2)$$

gdje je:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (= 186,67 \Omega) \quad (3)$$

b) Naponski izvor E_2 jest aktivan (slika 2b).

Prema slici 2b dobije se:

$$\text{čvor } B: \quad I_{A2} = I_4 - I_3 \quad (4)$$

Struje I_3 i I_4 određuju se uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona:

$$\text{čvor } A: \quad I = I_2 + I_4 \quad (5)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_2 = I_3 R_3 + I_4 R_4 \quad (6)$$

$$\text{petlja } II.: \quad I_4 R_4 - I_2 R_2 = 0 \quad (7)$$

gdje je:

$$I = \frac{E_2}{R_e} \quad (= 0,2 \text{ A}) \quad (8)$$

struja izvora E_2 ,

$$R_e = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \quad (= 175 \Omega) \quad (9)$$

ekvivalentni otpor mreže.

Rješenje sustava (5) i (7) uz (8) daje:

$$I_4 = \frac{R_2 E_2}{R_e (R_2 + R_4)} \quad (= 0,05 \text{ A}) \quad (10)$$

Iz (6) dobije se:

$$I_3 = \frac{E_2 - I_4 R_4}{R_3} \quad (= 0,1\text{A}) \quad (11)$$

Uvrštavanjem (10) i (11) u (4) dobije se: $I_{A2} = -0,05\text{ A}$.

Prema (1), struja kroz ampermetar, jest: $I_A = 0,1\text{A}$

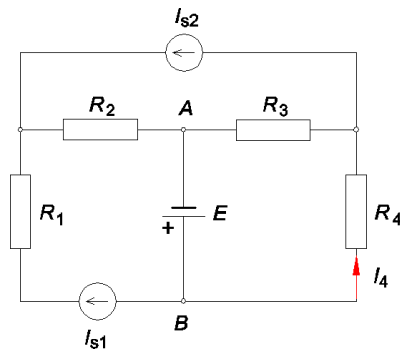


Primjer 13.3.4.

Metodom superpozicije odredite struju kroz otpor R_4 za shemu prema slici 1.

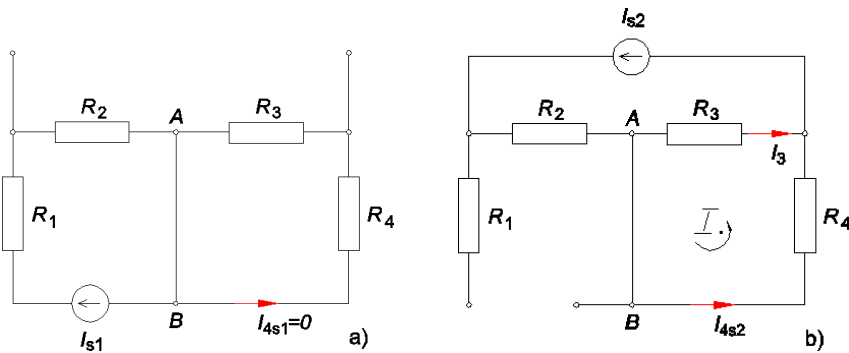
Podatci: $I_{s1} = I_{s2} = 1\text{A}$, $E = 1\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\Omega$.

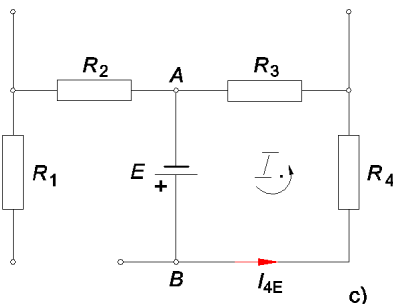
Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim naponskim i strujnim izvorima

Budući da električna mreža sadrži jedan naponski i dva strujna izvora, struja u grani s otporom R_4 odredit će se iz tri koraka.





Sl. 2. Zbroj struja svakog od izvora dat će traženu struju

Struja kroz otpor R_4 jest:

$$I_4 = I_{4s1} + I_{4s2} + I_{4E} \quad (1)$$

a) Strujni izvor I_{s1} jest aktivan (slika 2a).

Budući da su prespajanjem naponskog izvora E čvorovi A - B kratko spojeni, to je struja:

$$I_{4s1} = 0 \quad (2)$$

b) Strujni izvor I_{s2} jest aktivan (slika 2b).

Uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad I_{s2} = I_3 + I_{4s2} \quad (3)$$

$$\text{petlja } I: \quad I_{4s2}R_4 - I_3R_3 = 0 \quad (4)$$

Sustav (3) i (4) daje:

$$I_{4s2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} I_{s2} \quad (= 0,5 \text{ A}) \quad (5)$$

c) Naponski izvor E jest aktivan (slika 2c).

Uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju I dobije se:

$$I_{4E} = \frac{E}{R_3 + R_4} \quad (= 0,5 \text{ A}) \quad (6)$$

Uvrštavanjem (5) i (6) u (1), struja kroz otpor R_4 jest: $I_4 = 1 \text{ A}$.

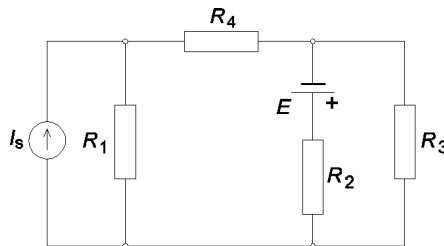


Primjer 13.3.5.

Na slici 1 dana je shema električne mreže. Odredite:

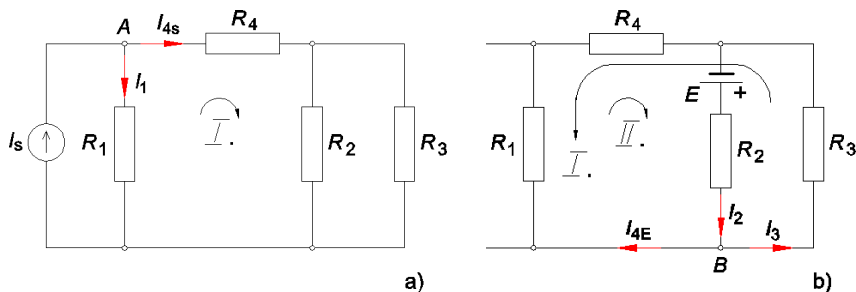
- uporabom metode superpozicije struju kroz otpor R_4
- snagu razvijenu na otporu R_4 .

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 3\Omega$, $E = 40\text{ V}$, $I_s = 3\text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

a) Budući da električna mreža sadrži dva izvora, struja kroz otpor R_4 odredit će se iz dva koraka.



Sl. 2. Zbroj struja svakog od izvora u traženoj grani dat će traženu struju

a) Strujni izvor I_s jest aktivan (slika 2a).

Uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad I_s - I_{4s} - I_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{petlja } I: \quad I_{4s} \left(R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) - I_1 R_1 = 0 \quad (2)$$

Rješenje sustava (1) i (2) daje: $I_{4s} = 1,5\text{ A}$.

a₂) Naponski izvor E jest aktivan (slika 2b).

Uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona dobije se:

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ \u010d}vora$$

$$n_g = 3 \text{ grane}$$

$$n_{np} = 2 \text{ nezavisne petlje}$$

$$\text{\u010d}vor B: \quad I_2 - I_{4E} - I_3 = 0 \quad (3)$$

$$\text{petlja I.}: \quad I_3 R_3 - I_{4E} (R_1 + R_4) = 0 \quad (4)$$

$$\text{petlja II.}: \quad E = I_2 R_2 + I_{4E} (R_1 + R_4) \quad (5)$$

Sustav (3) do (5) daje: $I_{4E} = 2,5 \text{ A}$.

S obzirom na smjerove struja I_{4s} i I_{4E} (slika 2a i 2b), struja kroz otpor R_4 jest:

$$I_4 = 4 \text{ A}$$

b) Snaga razvijena na otporu R_4 , prema (11.4), jest:

$$P_4 = I_4^2 R_4 \quad (= 48 \text{ W})$$

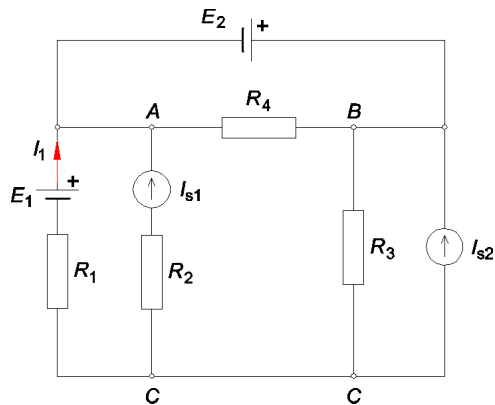


Primjer 13.3.6.

Na slici 1 prikazana je shema elektri\u010dne mre\u017ee. Odredite snagu elektri\u010dnog izvora E_1 . Struju izvora E_1 odredite metodom superpozicije.

Podatci: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5 \Omega$, $I_{s1} = I_{s2} = 2 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

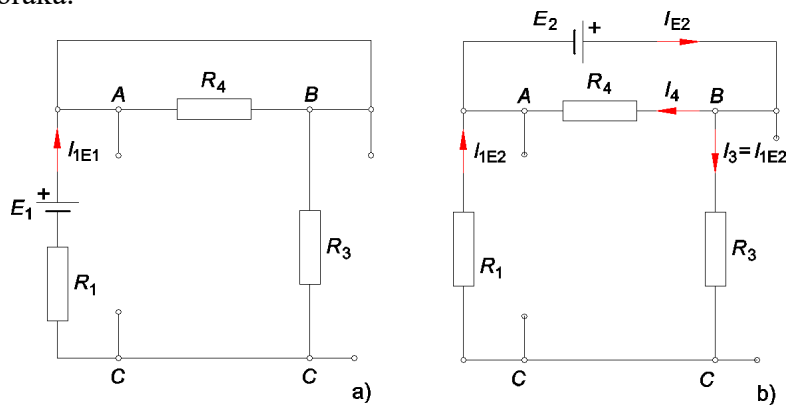
Snaga naponskog izvora, prema (12.3), jest:

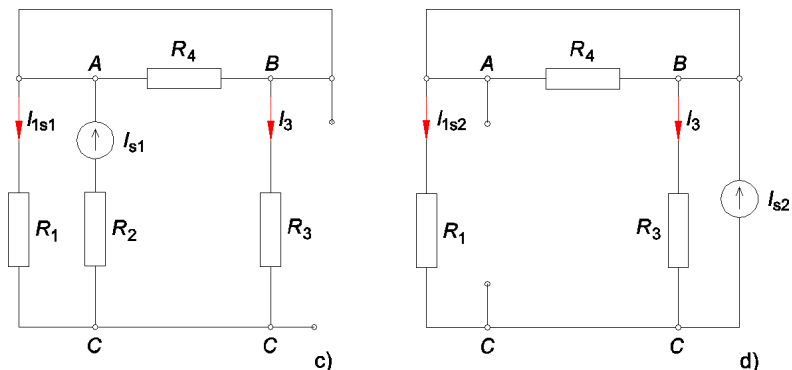
$$P_1 = E_1 I_1 \quad (1)$$

gdje je:

E_1 - EMS naponskog izvora,
 I_1 - struja naponskog izvora.

Budući da zadana električna mreža ima četiri izvora, rješenje se dobije iz četiri koraka.





Sl. 2. Zbroj struja svakog od izvora u traženoj grani dat će traženu struju

a) Naponski izvor E_1 jest aktivan (slika 2a). Budući da je otpor R_4 kratko spojen, dobije se:

$$I_{1E_1} = \frac{E_1}{R_1 + R_3} \quad (= 1 \text{ A}) \quad (1)$$

b) Naponski izvor E_2 jest aktivan (slika 2b).

$$\text{za čvor } B: \quad I_{1E_2} = I_{E_2} - I_4 \quad (2)$$

$$\text{djelitelj struje:} \quad I_{1E_2} : I_4 = R_4 : (R_1 + R_3) \quad (3)$$

gdje je I_{E_2} struja izvora E_2 :

$$I_{E_2} = \frac{E_2}{\frac{(R_1 + R_3)R_4}{R_1 + R_2 + R_3}} \quad (= 6 \text{ A}) \quad (4)$$

Sustav (2) i (3) daje: $I_{1E_2} = 2 \text{ A}$.

c) Strujni izvor I_{s1} jest aktivan, slika 2c. Budući da je otpor R_4 kratko spojen, dobije se:

$$\text{za čvor } A: \quad I_{s1} = I_{1s1} + I_3 \quad (5)$$

$$\text{djelitelj struje:} \quad I_{1s1} : I_3 = R_3 : R_1 \quad (6)$$

Sustav (5) i (6) daje: $I_{1s1} = 1 \text{ A}$.

d) Strujni izvor I_{s2} jest aktivan (slika 2d). Budući da je otpor R_4 kratko spojen, dobije se:

$$\text{za čvor } B: \quad I_{s2} = I_{1s2} + I_3 \quad (7)$$

$$\text{djelitelj struje:} \quad I_{1s2} : I_3 = R_3 : R_1 \quad (8)$$

Sustav (7) i (8) daje: $I_{1s2} = 1 \text{ A}$.

Uvažavajući smjerove struja kroz granu $A-C$ dobije se:

$$I_1 = I_{1E_1} + I_{1E_2} - I_{1s1} - I_{1s2} \quad (9)$$

iznosa: $I_1 = 1 \text{ A}$.

Snaga izvora, prema (1), jest: $P_1 = 10 \text{ W}$.

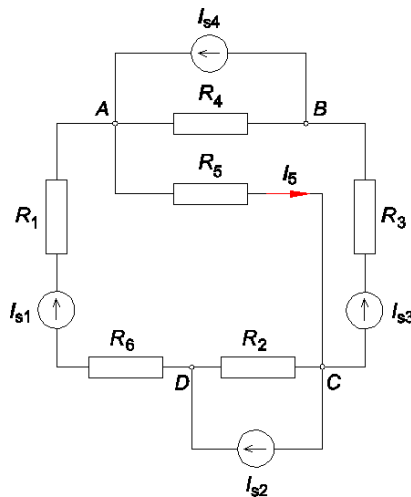


Primjer 13.3.7.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1. Uporabom metode superpozicije odredite jakost struje kroz otpor R_5 .

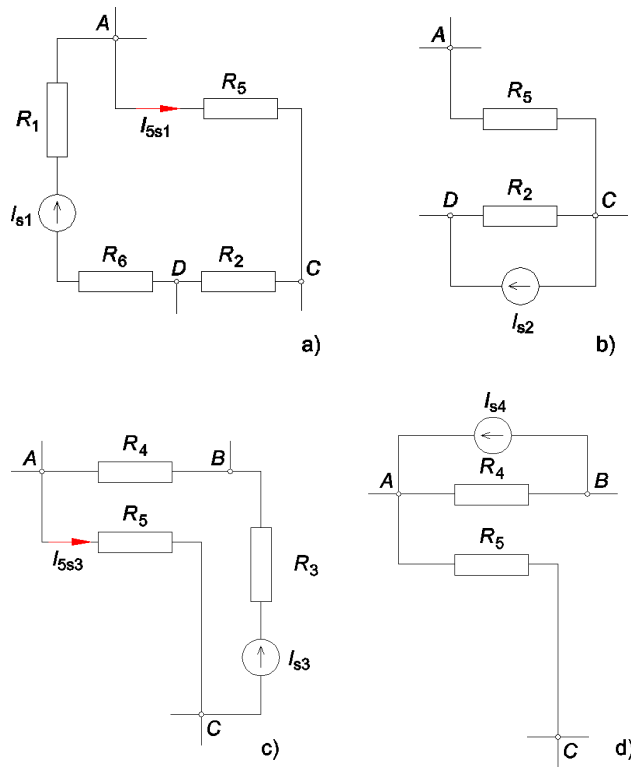
Podatci: $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 10 \Omega$, $I_{s1} = I_{s2} = 3 \text{ A}$, $I_{s3} = I_{s4} = 2 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže sa strujnim izvorima

Budući da električna mreža ima četiri električna izvora, tražena struja dobit će se iz četiri koraka (slika 2):



Sl. 2. Zbroj struja svakog od izvora u traženoj grani dat će traženu struju

$$I_5 = I_{5s1} + I_{5s2} + I_{5s3} + I_{5s4} \quad (1)$$

a) Strujni izvor I_{s1} jest aktivan (slika 2a). Iz sheme dobije se:

$$I_{5s1} = I_{s1} \quad (= 3 \text{ A}) \quad (2)$$

b) Strujni izvor I_{s2} jest aktivan (slika 2b). Iz sheme dobije se:

$$I_{5s2} = 0 \quad (3)$$

Struja strujnog izvora I_{s2} zatvara se samo kroz otpor R_2 .

c) Strujni izvor I_{s3} jest aktivan (slika 2c). Iz sheme dobije se:

$$I_{5s3} = I_{s3} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (4)$$

d) Strujni izvor I_{s4} jest aktivan (slika 2d). Iz sheme dobije se:

$$I_{s4} = 0 \quad (5)$$

Struja strujnog izvora I_{s4} zatvara se samo kroz otpor R_4 .

Tražena struja, prema (1), jest: $I_5 = 5 \text{ A}$.



13.4. Metoda potencijala čvorova

Polazište ove metode je u I. Kirchhoffovu zakonu. Po ovom zakonu moguće je napisati $n_{\text{č}} - 1$ jednažbu što daje nedefiniran sustav. Stoga je nužno, da se dobije definirani sustav, n - tom čvoru (potrebno je) dodijeliti potencijal po volji - najčešće nulti.

Potencijal ma kojeg čvora mreže, prema **(17.33)***, jest:

$$G_{jj}\varphi_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_{\text{gč}}} G_{jk}\varphi_k = \text{alg} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_{\text{gč}}} (G_{jk}E_{jk} + I_{jk}) \quad (13.9)$$

gdje je:

φ_j - potencijal j -tog čvora,

G_{jj} - zbroj vodljivosti grana j -tog čvora,

G_{jk} - zbroj vodljivosti grane koja spaja j -ti i k -ti čvor,

E_{jk} - zbroj EMS grane koja spaja j -ti i k -ti čvor,

I_{jk} - struja strujnog izvora grane koja spaja j -ti i k -ti čvor,

$n_{\text{gč}}$ - broj grana spojenih na j -ti čvor.

E_{jk} i I_{jk} uzimaju se pozitivnim ako su usmjereni prema promatranom čvoru.

S poznatim potencijalima čvorova struje grana, prema **(11.8)**, jest:

$$I = \frac{U_{AB} + \text{alg} \sum_i E_i}{\sum_k R_k} \quad (13.10)$$

gdje je:

$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ - napon između dva čvora,

E_i - elektromotorne sile promatrane grane,

R_k - otpori promatrane grane.

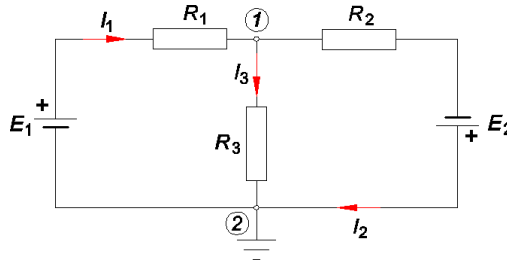
Jednažba **(13.10)** napisana je za struju koja teče od višeg φ_A k nižem φ_B potencijalu.

* Ako granu električne mreže čini serijski spoj idealnog strujnog izvora I_s i radnog otpora R , tada radni otpor, odnosno njegova recipročna vrijednost G izuzimaju se iz zbroja vodljivosti G_{jj} čvora j , a isto tako iz vodljivosti G_{jk} između j -tog i k -tog čvora u kojoj je idealni strujni izvor.

Primjer 13.4.1.

Za shemu električne mreže (slika 1) metodom potencijala čvorova odredite struje u svim granama mreže.

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{V}$, $E_2 = 12\text{V}$.

Rješenje

Sl. 1. n -tom čvoru dodijeli se po volji potencijal

Prema odabranim smjerovima struje (slika 1) i (13.10), struje pojedinih grana jesu:

$$I_1 = \frac{U_{21} + E_1}{R_1} \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{U_{12} + E_2}{R_2} \quad (2)$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_3} \quad (3)$$

gdje je:

$$U_{12} = -U_{21} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4)$$

razlika potencijala između čvora 1 i čvora 2.

Električna mreža (slika 1) ima:

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 1 \text{ broj čvorova u kojem se računa potencijal}$$

Potencijal jednog od dva čvora bira se, npr. potencijal čvora 2: $\varphi_2 = 0$.

Potencijal čvora 1, prema slici 1 i (13.9) jest:

$$\varphi_1(G_1 + G_2 + G_3) = G_1 E_1 - G_2 E_2 \quad (5)$$

ili u obliku ($G_i = 1/R_i$).

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} \quad (6)$$

Iz (6) dobije se: $\varphi_1 = 6 \text{ V}$.

Prema (1), (2) i (3) uz (4) struje grana jesu:

$$I_1 = 5 \text{ A} \quad , \quad I_2 = 3 \text{ A} \quad , \quad I_3 = 2 \text{ A}$$

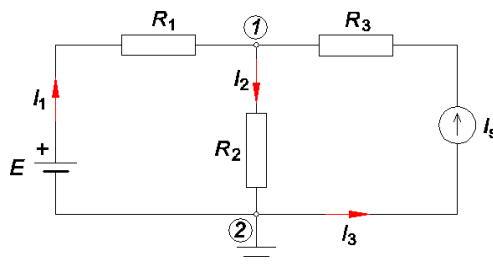


Primjer 13.4.2.

Za shemu električne mreže (slika 1) metodom potencijala čvorova odredite struje u svim granama mreže.

Podatci: $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $E = 24 \text{ V}$, $I_s = 4 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim strujnim izvorom

Prema odabranim smjerovima struje (slika 1) i (13.10), struje pojedinih grana jesu:

$$I_1 = \frac{U_{21} + E}{R_1} \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} \quad (2)$$

$$I_3 = I_s \quad (3)$$

gdje je:

$$U_{12} = -U_{21} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4)$$

razlika potencijala između čvorova 1 i 2.

Električna shema ima:

$$n_{\check{c}} = 2 \text{ čvora}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 1 \text{ broj čvorova u kojima se računa potencijal}$$

Bira se potencijal čvora 2: $\varphi_2 = 0 \text{ V}$.

Potencijal čvora 1, prema slici 1 i (13.9) jest:

$$\varphi_1(G_1 + G_2) = I_s + G_1 E \quad (5)$$

ili u obliku:

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = I_s + \frac{E}{R_1} \quad (6)$$

Iz (6) dobije se: $\varphi_2 = 24 \text{ V}$.

Prema (1), (2) i (3) uz (4) struje grana jesu:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad , \quad I_2 = 4 \text{ A} \quad , \quad I_3 = I_s = 4 \text{ A}$$



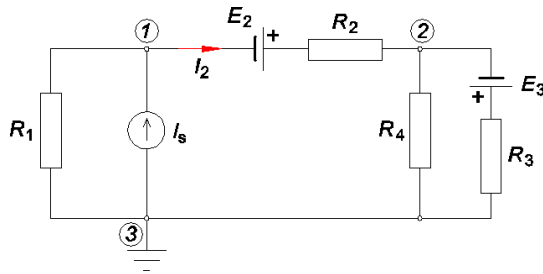
Primjer 13.4.3.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite razvijenu snagu na otporu R_2 .

Napomena: Pri rješavanju zadatka koristite metodu potencijala čvorova.

Podatci: $R_1 = R_3 = 8 \Omega$, $R_2 = R_4 = 4 \Omega$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 16 \text{ V}$, $I_s = 6 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Razvijena snaga na otporu R_2 , prema (11.4), jest:

$$P = I_2^2 R_2 \quad (1)$$

S poznatim potencijalima φ_1 i φ_2 struja I_2 , prema (13.10), jest:

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_2}{R_2} \quad (2)$$

Zadana električna mreža ima:

$$n_{\check{c}} = 3 \text{ čvora}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 2 \text{ broj čvorova u kojima se računa potencijal}$$

Bira se potencijal čvora 3: $\varphi_3 = 0 \text{ V}$.

Jednadžbe potencijala čvorova 1 i 2 prema (13.9) jesu:

$$\text{čvor 1.:} \quad \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_2} = I_s - \frac{E_2}{R_2} \quad (3)$$

$$\text{čvor 2.:} \quad -\varphi_1 \frac{1}{R_2} + \varphi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} \quad (4)$$

Rješenje sustava (3) i (4) daje: $\varphi_1 = \varphi_2 = 8 \text{ V}$.

Prema (2) tražena struja jest: $I_2 = 5 \text{ A}$.

Prema (1) razvijena snaga jest: $P = 100 \text{ W}$.

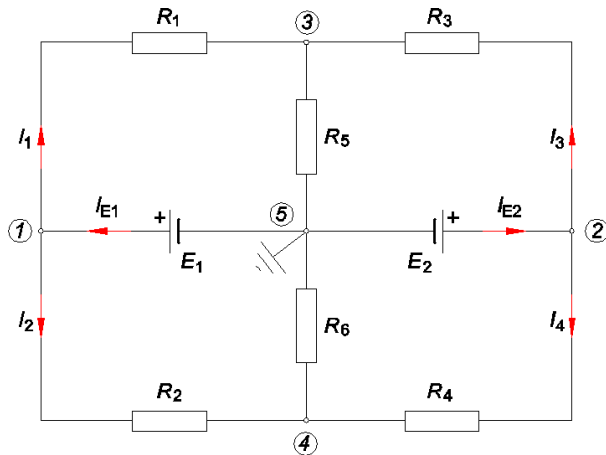


Primjer 13.4.4.

Za shemu mreže (slika 1) metodom potencijala čvorova odredite struje u granama s naponskim izvorima.

Podatci: $E_1 = 2E_2 = 20 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, $2R_3 = R_4 = R_5 = 4 \Omega$, $R_6 = 3 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s naponskim izvorom

Uz odabrane smjerove struja, prema slici 1 i (13.10), struje pojedinih grana jesu:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_1} \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_2} \quad (2)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_3} \quad (3)$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} \quad (4)$$

Struje kroz naponske izvore, uporabom I. Kirchhoffova zakona za čvorove 1 i 2, jesu:

$$I_{E1} = I_1 + I_2 \quad (5)$$

$$I_{E2} = I_3 + I_4 \quad (6)$$

Određuju se potencijali čvorova. Električna mreža ima:

$$n_{\check{c}} = 5 \text{ čvorova}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 4 \text{ broj čvorova u kojima se računa potencijal}$$

Bira se potencijal čvora 5: $\varphi_5 = 0 \text{ V}$.

Uz nulti potencijal čvora br. 5 potencijali čvorova 1 i 2 određeni su EMS idealnih naponskih izvora.

$$\varphi_1 = 20 \text{ V} = E_1 \quad (6)$$

$$\varphi_2 = 10 \text{ V} = E_2 \quad (7)$$

Jednadžbe potencijala čvorova, prema (13.9), jesu:

$$\text{čvor 3.:} \quad -\frac{1}{R_1} \varphi_1 - \frac{1}{R_3} \varphi_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) \varphi_3 = 0 \quad (8)$$

$$\text{čvor 4.:} \quad -\frac{1}{R_2} \varphi_1 - \frac{1}{R_4} \varphi_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right) \varphi_4 = 0 \quad (9)$$

Rješavanjem sustava (8) i (9) dobije se: $\varphi_3 = 9,47 \text{ V}$, $\varphi_4 = 8,30 \text{ V}$.

Tražene struje pojedinih grana, prema (1) do (6), jesu:

$$I_{E1} = 4,45 \text{ A}, \quad I_{E2} = 0,69 \text{ A}$$

$$(I_1 = 2,11 \text{ A}, \quad I_2 = 2,34 \text{ A}, \quad I_3 = 0,26 \text{ A}, \quad I_4 = 0,43 \text{ A})$$

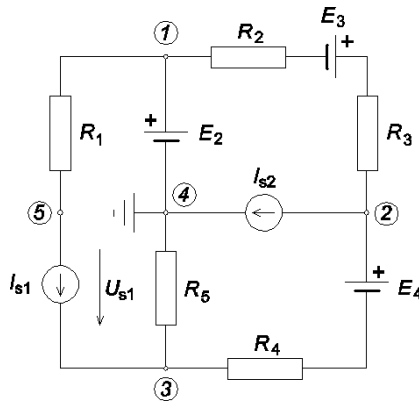


Primjer 13.4.5.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite snagu strujnog izvora I_{s1} .

Podatci: $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 30\ \Omega$, $I_{s1} = 12\ \text{A}$, $I_{s2} = 8\ \text{A}$,
 $E_2 = 10\ \text{V}$, $E_3 = E_4 = 30\ \text{V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s dva idealna strujna izvora

Snaga strujnog izvora, prema (12.4), jest:

$$P_{s1} = U_{s1} I_{s1} \quad (1)$$

gdje je:

$$U_{s1} = \varphi_3 - \varphi_5 \quad (2)$$

napon strujnog izvora.

Električna mreža ima:

$$n_{\check{c}} = 4 \text{ čvora}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 3 \text{ broj čvorova u kojima se računa potencijal}$$

Bira se potencijal čvora 4: $\varphi_4 = 0\ \text{V}$.

Budući da je naponski izvor E_2 idealan, to je, s obzirom da je čvor 4 nultog potencijala, potencijal čvora 1:

$$\varphi_1 = E_2 \quad (=10\text{V}) \quad (3)$$

Jednadžbe potencijala čvorova 2 i 3, prema slici 1 i (13.9), jesu:

čvor 2.:

$$-\varphi_1 \frac{1}{R_2 + R_3} + \varphi_2 \left(\frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R_4} = -I_{s2} + \frac{E_3}{R_2 + R_3} + \frac{E_4}{R_4} \quad (4)$$

$$\text{čvor 3.:} \quad -\varphi_2 \frac{1}{R_4} + \varphi_3 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = I_{s1} - \frac{E_4}{R_4} \quad (5)$$

Rješenje sustava (4) i (5) daje: $\varphi_2 = 17,78\text{V}$, $\varphi_3 = 136,67\text{V}$.

Potencijal čvora 5 jest:

$$\varphi_5 = \varphi_1 - I_{s1} R_1 \quad (= -50\text{V}) \quad (6)$$

Napon strujnog izvora (2) jest:

$$U_{s1} = 186,67\text{V}$$

Snaga strujnog izvora (1) jest: $P_{s1} = 2,24\text{kW}$.

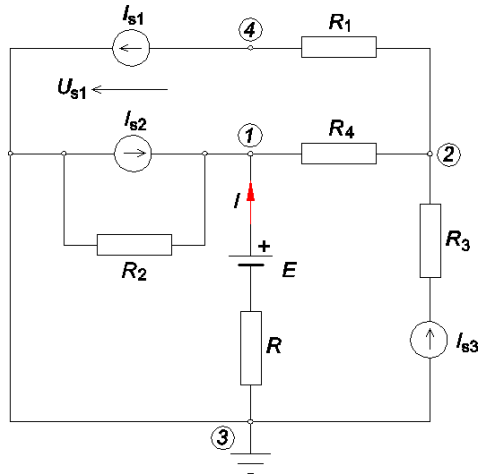


Primjer 13.4.6.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite snagu naponskog izvora i idealnog strujnog izvora I_{s1} .

Podatci: $I_{s1} = 5\text{A}$, $I_{s2} = 10\text{A}$, $I_{s3} = 15\text{A}$, $E = 20\text{V}$, $R = R_1 = R_4 = 2\Omega$,
 $R_2 = R_3 = 4\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Snaga naponskog izvora, prema (12.3), jest:

$$P_E = EI \quad (1)$$

Snaga strujnog izvora, prema (12.4), jest:

$$P_{s1} = I_{s1} U_{s1} \quad (2)$$

Električna mreža ima:

$$n_{\check{c}} = 3 \text{ čvora}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 2 \text{ broj čvorova u kojima se računa potencijal}$$

Bira se potencijal čvora 3: $\varphi_3 = 0V$.

Jednadžbe potencijala čvorova 1 i 2, prema slici 1 i (13.9), jesu:

$$\text{čvor 1.:} \quad \varphi_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_4} = I_{s2} + \frac{E}{R} \quad (3)$$

$$\text{čvor 2.:} \quad -\varphi_1 \frac{1}{R_4} + \varphi_2 \frac{1}{R_4} = -I_{s1} + I_{s3} \quad (4)$$

Rješenje sustava (3) i (4) daje: $\varphi_1 = 40 \text{ V}$, $\varphi_2 = 60 \text{ V}$.

Struja naponskog izvora uz pretpostavljeni smjer struje (slika 1), prema (13.10), jest:

$$I = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E}{R} \quad (= -10 \text{ A}) \quad (5)$$

Snaga naponskog izvora, prema (1), jest: $P_E = -200 \text{ W}$, izvor prima snagu.

Napon U_{s1} idealnog strujnog izvora I_{s1} , prema slici 1, jest:

$$U_{s1} = \varphi_3 - \varphi_2 + I_{s1} R_1 \quad (= -50 \text{ V}) \quad (6)$$

Snaga idealnog strujnog izvora, prema (2), jest: $P_{s1} = -250 \text{ W}$, izvor prima snagu.



Primjer 13.4.7.

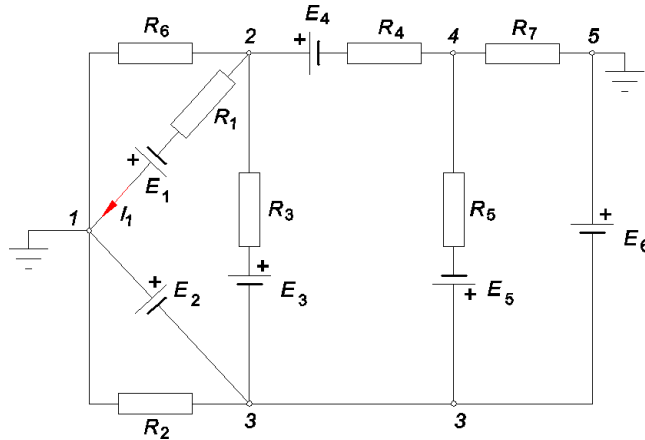
Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite razvijenu snagu na otporu R_1 .

Podatci: $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 4 \Omega$, $E_4 = E_6 = 10 \text{ V}$,

$E_3 = E_5 = 6 \text{ V}$, $\varphi_2 = -12 \text{ V}$.

Napomena: Pri analizi mreže koristite metodu potencijala čvorova.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže ima dva uzemljena čvora
Električna mreža ima:

$$n_{\check{c}} = 5 \text{ čvorova}$$

$$n_{\check{c}} - 1 = 4 \text{ broj čvorova u kojima se računa potencijal}$$

Potencijali čvorova 1, 2 i 5 određeni su zadatkom, dok je potencijal čvora 3 određen posredno (idealni izvor E_6):

Snaga razvijena na otporu R_1 jest:

$$P_1 = I_1^2 R_1 \quad (1)$$

gdje je:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1} \quad (2)$$

struja grane, prema (13.10).

$$\varphi_1 = 0 \text{ V} \quad , \quad \varphi_2 = -12 \text{ V} \quad , \quad \varphi_3 = -10 \text{ V} \quad , \quad \varphi_5 = 0 \text{ V}$$

Potencijali pojedinih čvorova, ili su zadani zadatkom φ_2 , ili svojim uzemljenjem φ_1 i φ_5 , ili idealnim naponskim izvorom φ_3 .

Određuje se EMS naponskog izvora E_2 .

čvor br. 2.:

$$\varphi_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R_3} - \varphi_4 \frac{1}{R_4} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} \quad (3)$$

čvor br. 4.:

$$-\varphi_2 \frac{1}{R_4} - \varphi_3 \frac{1}{R_5} + \varphi_4 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} \right) = -\frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5} \quad (4)$$

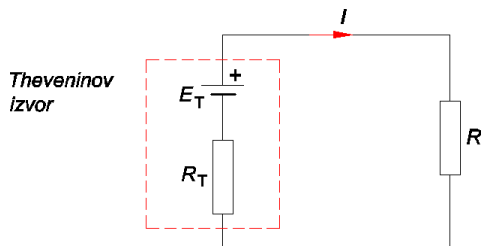
Iz (4) dobije se: $\varphi_4 = -12,67 \text{ V}$. Prema (2) jest: $I_1 = 9,33 \text{ A}$.

Iz (3) dobije se: $E_1 = 30,67 \text{ V}$. Prema (1) jest: $P_1 = 174,1 \text{ W}$.



13.5. Theveninov teorem

Ovaj teorem omogućuje izračun struje u jednoj grani ma kako složene električne mreže. Naime, po Theveninovu teoremu električna mreža ili njezin dio mogu se zamijeniti serijskim spojem EMS E_T i otporom R_T , slika 13.2. Struja u strujnom krugu, slika 13.2, jest:



Sl. 13.2. Theveninov naponski izvor zamjenjuje dio električne mreže

$$I = \frac{E_T}{R + R_T} \quad (13.11)$$

gdje je:

E_T - Theveninov napon koji se može izračunati ili izmjeriti na otvorenim stezaljkama preostalog dijela mreže,

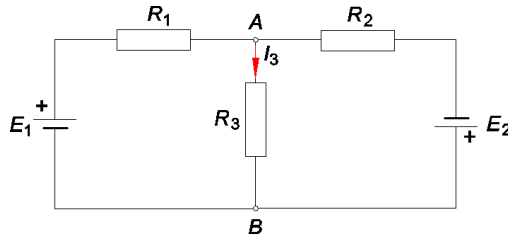
R_T - Theveninov otpor koji se može izračunati ili izmjeriti na otvorenim stezaljkama preostalog dijela mreže ako se naponski izvori kratko spoje, a strujni odspoje.

Primjer 13.5.1.

Za shemu električne mreže (slika 1), uporabom Theveninova teorema, odredite struju u grani s otporom R_3 , (vidi primjer 13.3.1).

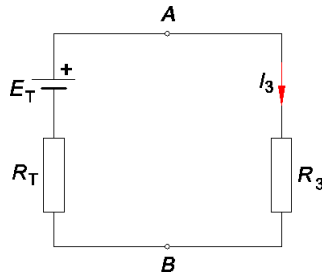
Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Dio električne mreže, izuzev grane s otporom R_3 , nadomjestit će se Theveninovim naponskim izvorom sukladno slici 13.2.

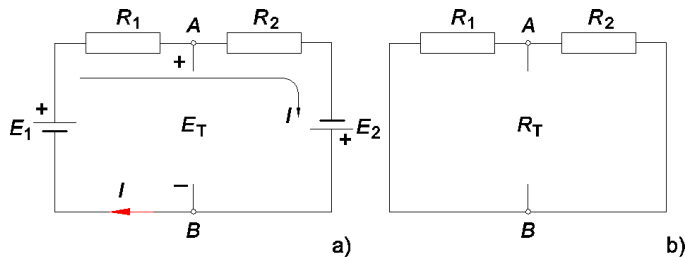


Sl. 2. Dio električne mreže nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

Jakost struje kroz otpor R_3 , prema slici 2, jest:

$$I_3 = \frac{E_T}{R_3 + R_T} \quad (1)$$

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesne sheme za proračun Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova A - B ako se izuzme otpor R_3 ($E_T = U_{AB_0}$, slika 3a). Uz pretpostavljeni smjer struje dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = E_1 - IR_1 \quad (2a)$$

ili
$$E_T = IR_2 - E_2 \quad (2b)$$

gdje je:

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \quad (= 3,8 \text{ A}) \quad (3)$$

struja petlje.

Uvrštavanjem (3) u (2) dobije se: $E_T = 10,8 \text{ V}$.

Theveninov otpor jest otpor između čvorova A - B , ako se izuzme otpor R_3 i kratko spoje EMS naponskih izvora (slika 3b).

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 2,4 \Omega) \quad (4)$$

Prema (1), tražena struja jest: $I_3 = 2 \text{ A}$.

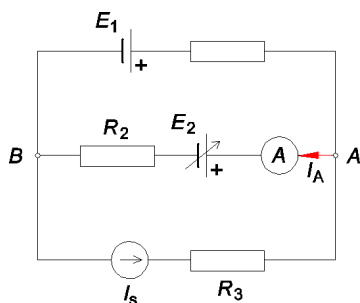


Primjer 13.5.2.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite iznos EMS E_2 tako da je pokazivanje ampermetra jednako nuli.

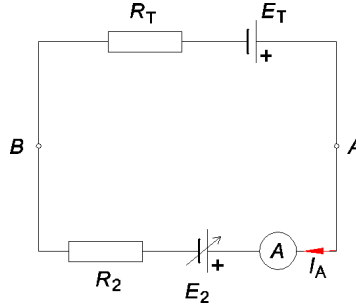
Podatci: $R_1 = 3R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $E_1 = 10 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$, $R_A = 0 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim strujnim izvorom

Dio električne mreže, izuzev grane s ampermetrom, nadomjestit će se, sukladno slici 13.2, Theveninovim naponskim izvorom:



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

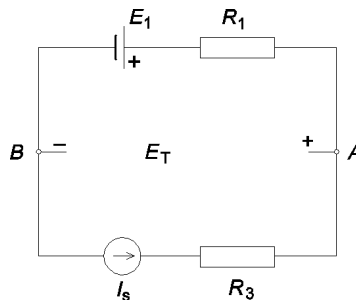
Jakost struje što je mjeri ampermetar, uz pretpostavljeni smjer struje, jest:

$$I_A = \frac{E_T - E_2}{R_T + R_2} \quad (1)$$

Iz (1) prema uvjetu zadatka, $I_A = 0 \text{ A}$, dobije se:

$$E_2 = E_T \quad (2)$$

Određuje se Theveninov napon. Theveninov napon jest napon između čvorova A-B ako se izuzme grana s ampermetrom (slika 3).



Sl. 3. Nadomjesna shema za proračun Theveninova napona

Uz smjer struje strujnog izvora (slika3), Theveninov napon jest:

$$E_T = U_{AB_0} = E_1 + R_1 I_s \quad (= 22 \text{ V}) \quad (3)$$

što je prema (2) iznos EMS E_2 pri kojem je pokazivanje ampermetra jednako nuli.

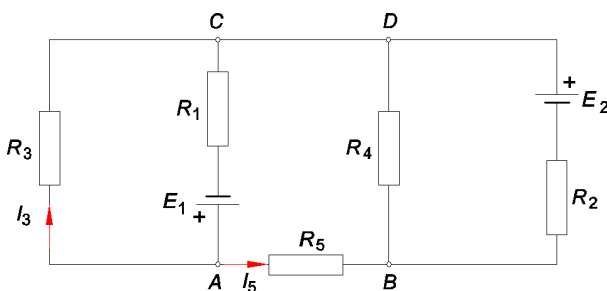


Primjer 13.5.3.

Uporabom Theveninova teorema odredite, za shemu električne mreže prikazane na slici 1, struje kroz otpore R_3 i R_5 (primjer 13.1.3).

Podatci: $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, $R_5 = 3\Omega$, $E_1 = 45\text{ V}$, $E_2 = 28\text{ V}$.

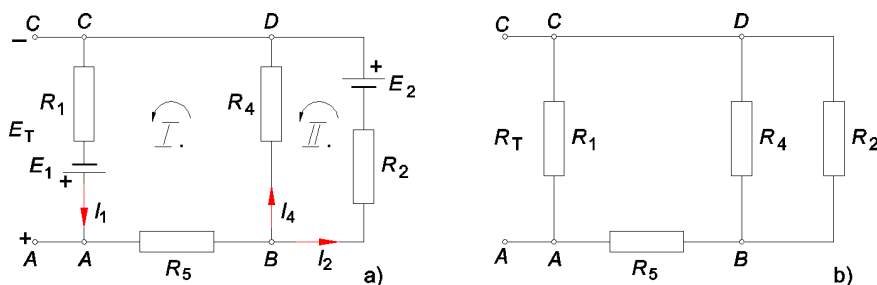
Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) Određivanje struje I_3 kroz otpor R_3 . Struja I_3 prema Theveninovu teoremu (13.11) jest:

$$I_3 = \frac{E_T}{R_3 + R_T} \tag{1}$$



Sl. 2. Nadomjesna shema električne mreže za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon E_T jest napon između čvorova $A-C$ ako se izuzme otpor R_3 (slika 2a.). Uz pretpostavljeni smjer struje I_1 dobije se:

$$E_T = U_{AC_0} = E_1 - I_1 R_1 \quad (2)$$

Struja I_1 određuje se metodom konturnih struja:

$$\text{petlja I.:} \quad (R_1 + R_5 + R_4)I_1 - R_4 I_{II} = E_1 \quad (3)$$

$$\text{petlja II.:} \quad -R_4 I_1 + (R_2 + R_4)I_{II} = E_2 \quad (4)$$

Sustav jednažbi (3) i (4) daje traženu struju: $I_1 = I_{II} = 10,1 \text{ A}$.

Prema (2) Theveninov napon jest: $E_T = 24,8 \text{ V}$.

Theveninov otpor jest otpor između čvorova $A-C$ ako se izuzme otpor R_3 i kratko spoje EMS naponskih izvora (slika 2b):

$$R_T = \frac{R_1(R_5 + R_{24})}{R_1 + R_5 + R_{24}} \quad (= 1,38 \Omega) \quad (5)$$

gdje je:

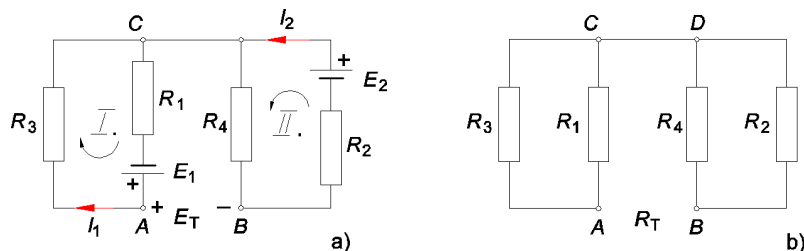
$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \quad (= 1,43 \Omega) \quad (6)$$

paralelni spoj otpora R_2 i R_4 .

Prema (1), tražena struja jest: $I_3 = 4,61 \text{ A}$.

b) Određivanje struje I_5 kroz otpor R_5 . Struja I_5 prema Theveninovu teoremu (13.11) jest:

$$I_5 = \frac{E_T}{R_5 + R_T} \quad (7)$$



Sl. 3. Nadomjesna shema električne mreže za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon E_T jest napon između čvorova A - B ako se izuzme otpor R_5 (slika 3a). Uz zadane smjerove struja dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = E_1 - I_1 R_1 + I_2 R_2 \quad (8)$$

Napomena: Od točke A do B može se ići i drugim putevima:

$$U_{AB_0} = I_1 R_3 + I_2 R_4, \quad U_{AB_0} = I_1 R_3 + E_2 - I_2 R_2, \quad U_{AB_0} = E_1 - I_1 R_1 + E_2 - I_2 R_2.$$

gdje su:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} \quad (= 7,5 \text{ A}) \quad (9)$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_4} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (10)$$

struje u petljama I . i II .

Theveninov napon, prema (8), jest: $E_T = 50 \text{ V}$.

Theveninov otpor jest otpor između čvorova A - B , uz izuzeti otpor R_5 i kratko spojene EMS naponskih izvora (slika 3b).

$$R_T = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \quad (= 2,76 \Omega) \quad (11)$$

Prema (7) tražena struja jest: $I_5 = 8,68 \text{ A}$.

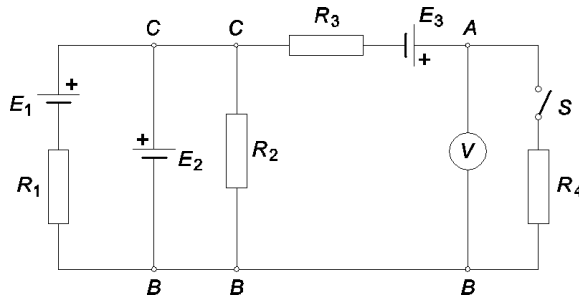


Primjer 13.5.4.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite pokazivanje voltmetra ako je:

- sklopka otvorena
- sklopka zatvorena.

Podatci: $E_1 = E_2 = 12\text{ V}$, $E_3 = 24\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$,
 $R_V \rightarrow \infty$.

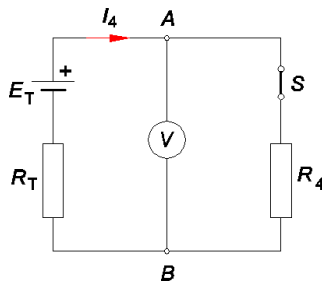
Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

a) Sklopka S je otvorena. Pokazivanje voltmetra jednako je Theveninovu naponu između čvorova A - B . Budući da je naponski izvor E_2 idealan, to je Theveninov napon:

$$U_{Va} = E_{Ta} = E_2 + E_3 \quad (= 36\text{ V}) \quad (1)$$

b) Sklopka S jest zatvorena. Dio električne mreže lijevo od čvorova A - B nadomjestit će se Theveninovim naponskim izvorom (slika 2), sukladno slici 13.2.



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

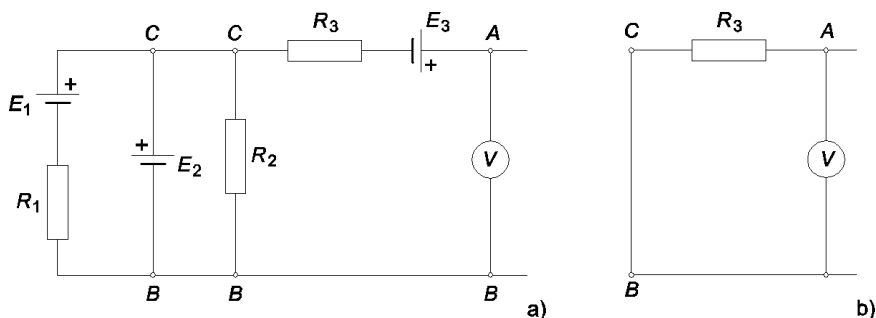
Uz pretpostavljeni smjer struje pad napona na otporu R_4 ujedno je napon što ga mjeri voltmetar:

$$U_{vb} = I_4 R_4 \quad (2)$$

gdje je:

$$I_4 = \frac{E_{Tb}}{R_4 + R_T} \quad (3)$$

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova $A-B$, ako se izuzme grana s otporom R_4 (slika 3a). Budući da je slika 2a identična slici 1, sklopka S je otvorena, to je Theveninov napon:

$$E_{Tb} = E_{Ta} \quad (= 36 \text{ V}) \quad (4)$$

Theveninov otpor jest otpor između čvorova $A-B$ ako se izuzme grana s otporom R_4 i kratko spoje sve EMS (slika 3b):

$$R_{Tb} = R_3 \quad (= 3 \Omega) \quad (5)$$

Uvrštavanjem (4) i (5) u (3) dobije se: $I_4 = 4 \text{ A}$.

Slijedi, prema (2), pokazivanje voltmetra: $U_{vb} = 24 \text{ V}$.



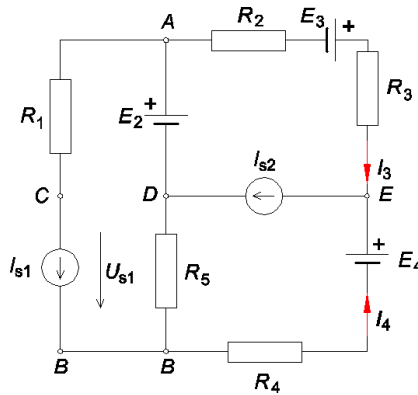
Primjer 13.5.5.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite snagu strujnog izvora I_{s1} , (vidi primjer 13.4.5).

Podatci: $R_1 = 5 \Omega$ $R_2 = R_3 = R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 30 \Omega$, $E_2 = 10 \text{ V}$,

$$E_3 = E_4 = 30\text{ V}, I_{s1} = 12\text{ A}, I_{s2} = 8\text{ A}.$$

Rješenje



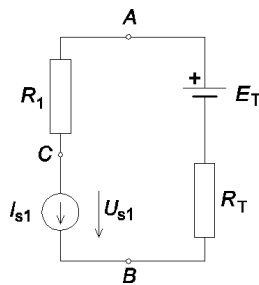
Sl. 1. Shema električne mreže s dva idealna strujna izvora

Snaga strujnog izvora I_{s1} , prema (12.4), jest:

$$P_{s1} = I_{s1} U_{s1} \quad (1)$$

gdje je U_{s1} napon na čvorovima strujnog izvora I_{s1} .

Dio električne mreže, desno od čvorova $A - B$, zamijenit će se sukladno slici 13.2 Theveninovima izvorom (slika 2).

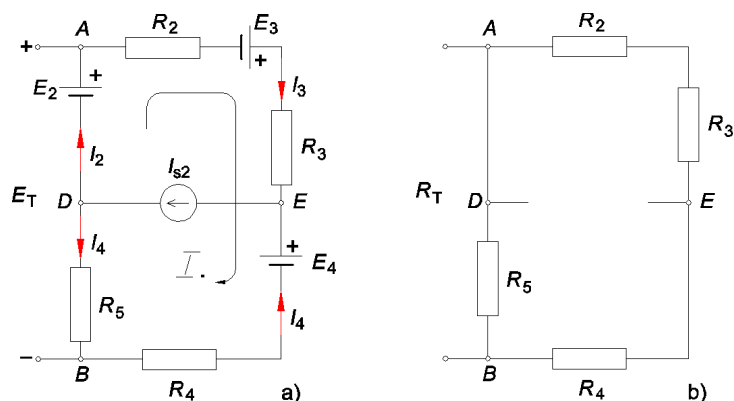


Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovima naponskim izvorom

Napon strujnog izvora, sa smjerom struje istog tog izvora, jest:

$$U_{s1} = U_{BC} = I_{s1}(R_1 + R_T) - E_T \quad (2)$$

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema električne mreže za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova A - B ako se izuzme serijski spoj otpora R_1 i strujni izvor I_{s1} (slika 3a). Uz pretpostavljene smjerove struja (slika 2a), dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = E_2 + I_4 R_5 \quad (3)$$

Određuje se struja I_4 uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona.

$$\text{čvor } E: \quad I_{s2} = I_3 + I_4 \quad (4)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_2 + E_3 - E_4 = I_3(R_2 + R_3) - I_4(R_4 + R_5) \quad (5)$$

Sustav jednadžbi (4) i (5) daje: $I_4 = 3,44 \text{ A}$.

Theveninov napon, prema (3), jest: $E_T = 113,2 \text{ V}$.

Theveninov otpor, prema slici 2b, jest:

$$R_T = \frac{R_5 R_{234}}{R_5 + R_{234}} \quad (= 20 \Omega) \quad (6)$$

gdje je:

$$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4 \quad (= 60 \Omega) \quad (7)$$

serijski spoj otpora R_2 , R_3 , R_4 .

Prema (2), napon strujnog izvora jest: $U_{s1} = 186,8\text{V}$.

Snaga strujnog izvora, prema (1), jest: $P_{s1} = 2241,6\text{W}$.



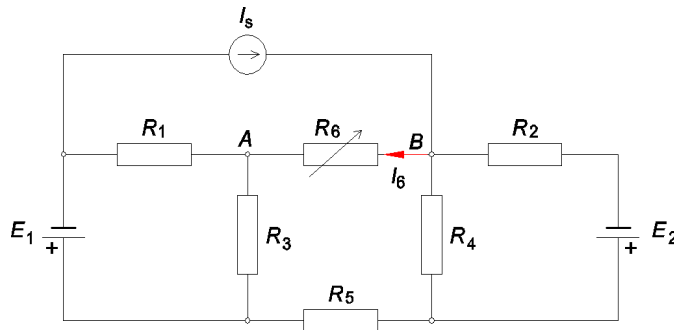
Primjer 13.5.6.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite otpor R_6 tako da se na njemu razvije maksimalna snaga kao i tu snagu.

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = R_3 = 8\Omega$, $R_4 = R_5 = 12\Omega$, $E_1 = 4\text{V}$,

$E_2 = 10\text{V}$, $I_s = 2\text{A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Razvijena snaga na otporu R_6 , prema (11.4), jest:

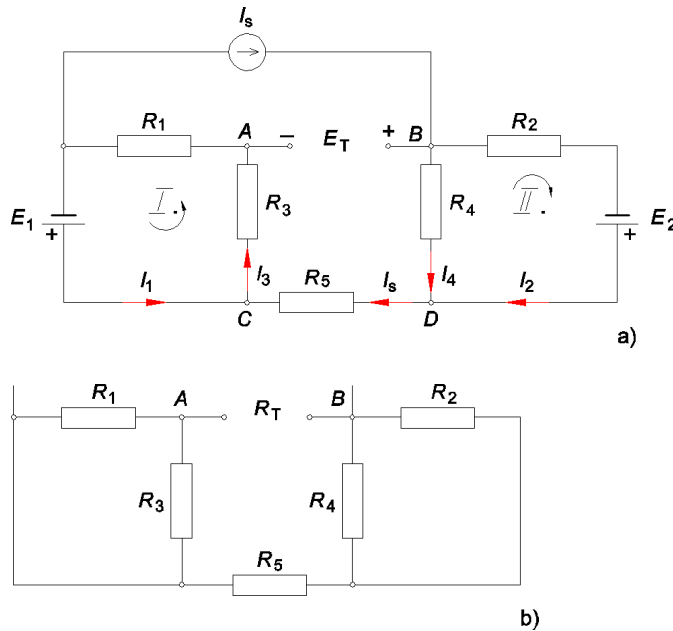
$$P_6 = I_6^2 R_6 \quad (1)$$

Maksimalna snaga bit će razvijena na trošilu ako je, prema (12.15), otpor trošila jednak unutarnjem otporu izvora:

$$R_6 = R_{in} \quad (2)$$

gdje je R_{in} unutarnji otpor naponskog izvora.

Zamijeni li se dio električne mreže, izuzev otpora R_6 , Theveninovim naponskim izvorom tada, je $R_{in} = R_T$.



Sl. 2. Nadomjesna shema za proračun Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova A - B ako se izuzme otpor grane R_6 (slika 2a). Uz pretpostavljene smjerove struja dobije se:

$$E_T = U_{BA_0} = I_4 R_4 + I_s R_5 + I_3 R_3 \quad (3)$$

Struje I_3 i I_4 odredit će se jednom od metoda, npr. uporabom Kirchhoffovih zakona.

$$\text{petlja I.:} \quad E_1 = I_3 (R_1 + R_3) \quad (4)$$

$$\text{čvor B (D):} \quad I_s = I_4 + I_2 = I_5 \quad (5)$$

$$\text{petlja II.:} \quad E_2 = I_2 R_2 - I_4 R_4 \quad (6)$$

Rješenje sustava (4), (5) i (6) daju: $I_3 = 0,33 \text{ A}$, $I_4 = 0,3 \text{ A}$.

Theveninov napon (3) jest: $E_T = 30,24 \text{ V}$.

Napomena: $I_5 = I_s$ jer je $I_s = I_4 + I_2 = I_5$, za čvor B odnosno D .

Theveninov otpor jest otpor između čvorova A - B ako se izuzme otpor R_6 , odspoji strujni, a prespoji naponski izvor (slika 2b).

$$R_T = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \quad (= 19,47 \Omega) \quad (7)$$

Prema (2) slijedi: $R_6 = R_T = 19,47 \Omega$.

Struja I_6 , prema slici 13.2, jest:

$$I_6 = \frac{E_T}{2R_T} \quad (= 0,78 \text{ A}) \quad (8)$$

Maksimalna snaga razvijena na otporu R_6 , prema (1), jest: $P_6 = 11,76 \text{ W}$.

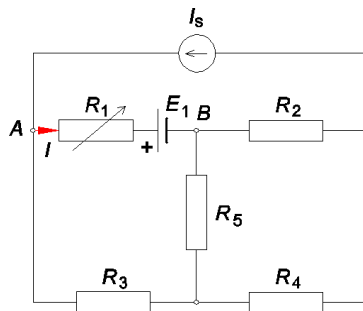


Primjer 13.5.7.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Koliki mora biti otpor R_1 da struja kroz njega bude $0,5 \text{ A}$.

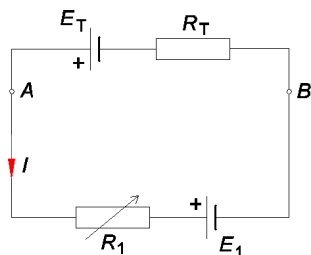
Podatci: $E_1 = 3 \text{ V}$, $R_2 = R_4 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $I_s = 2 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Zadatak će se riješiti tako da se dio električne mreže, izuzev grane s otporom R_1 , zamijeni Theveninovim naponskim izvorom sukladno slici 13.2.



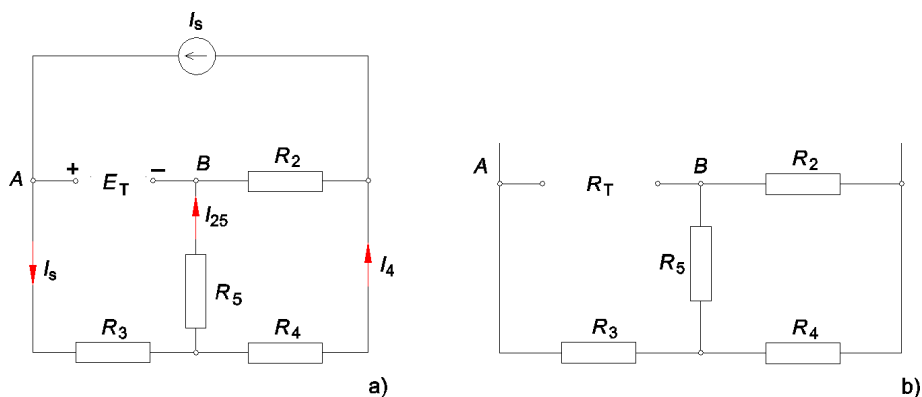
Sl. 2. Dio mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

Otpor R_1 određuje se uporabom II. Kirchhoffova zakona:

$$R_1 = \frac{E_T - E_1}{I} - R_T \quad (1)$$

gdje je struja I zadana zadatkom: $I = 0,5 \text{ A}$.

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za proračun Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon je napon između čvorova A - B ako se izuzme otpor R_1 i EMS E_2 (slika 3a). Uz pretpostavljene smjerove struja dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = I_s R_3 + I_{25} R_5 \quad (2)$$

gdje je:

$$I_{25} = \frac{R_4}{R_2 + R_4 + R_5} I_s \quad (= 0,8 \text{ A}) \quad (3)$$

Uvrštavanjem (3) u (2) sa zadanim vrijednostima dobije se: $E_T = 6,8 \text{ V}$.
Theveninov otpor jest otpor između čvorova A - B , ako se izuzme grana A - B i odspoji strujni izvor I_s (slika 3b).

$$R_T = R_3 + \frac{(R_2 + R_4)R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \quad (= 3,8 \Omega) \quad (4)$$

S izračunatim parametrima Theveninova naponskog izvora, prema (1), traženi otpor jest: $R_1 = 3,8 \Omega$.

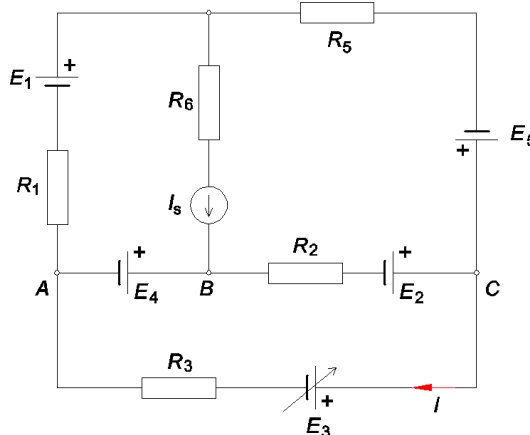


Primjer 13.5.8.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite iznos EMS E_3 tako da je napon U_{CA} jednak 5 V .

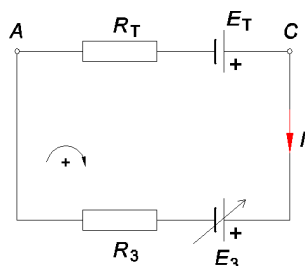
Podatci: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = E_5 = 5 \text{ V}$, $E_4 = 15 \text{ V}$, $I_s = 3 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = 5 \Omega$,
 $R_3 = 3 \Omega$, $R_5 = R_6 = 10 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Zadatak će se riješiti tako da se dio električne mreže, izuzev grane $A-C$ s izvorom $EMS E_3$, nadomjesti Theveninovim naponskim izvorom sukladno slici 13.2.



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

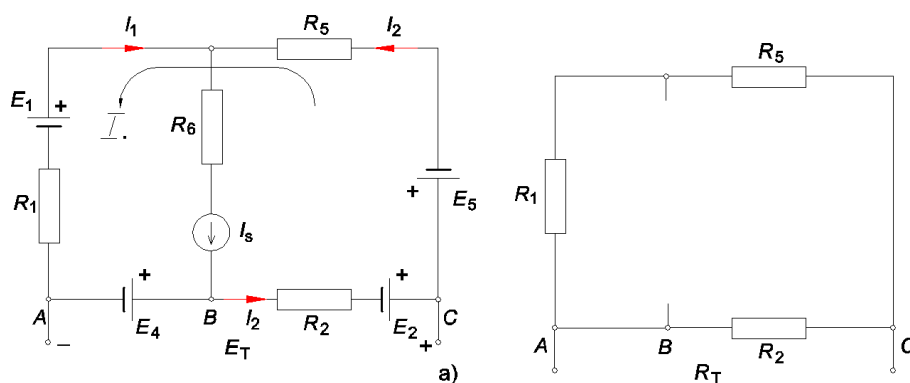
Uporabom Ohmova zakona za element strujnog kruga (11.9) dobije se:

$$E_3 = U_{CA} - IR_3 \quad (1)$$

gdje je:

$$I = \frac{E_T - E_3}{R_T + R_3} \quad (2)$$

Računaju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova $A-C$, ako se izuzme grana s $EMS E_3$ (slika 3a). S pretpostavljenim smjerovima struja (slika 3a), dobije se:

$$E_T = U_{CA_0} = E_4 - I_2 R_2 + E_2 \quad (3)$$

Struja I_2 odredit će se uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona:

$$\text{čvor } B: \quad I_1 - I_3 + I_2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E_4 + E_2 - E_5 - E_1 = I_2(R_2 + R_5) - I_1R_1 \quad (5)$$

Rješenje sustava (4) i (5) daje: $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$.

Theveninov napon, prema (3), jest: $E_T = 15 \text{ V}$.

Theveninov otpor jest otpor između čvorova $A-C$, ako se izuzme grana s EMS E_3 , strujni izvor odspoji, a izvori EMS prespoje. Prema slici 3b, dobije se:

$$R_T = \frac{(R_1 + R_5)R_2}{R_1 + R_5 + R_2} \quad (= 3,75 \Omega) \quad (6)$$

Sustav (1) i (2) uz zadani U_{CA} daje:

$$E_3 = \frac{U_{CA}(R_T + R_3) - E_T R_3}{R_T} \quad (= -3 \text{ V})$$

Slijedi, polaritet izvora E_3 je krivo pretpostavljen.

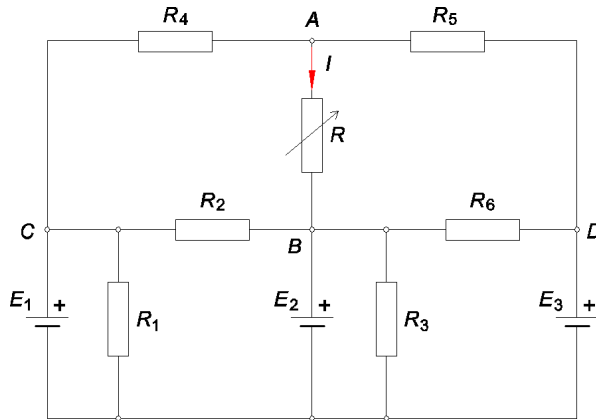


Primjer 13.5.9.

Na slici 1 prikazana je shema s tri idealna naponska izvora. Odredite iznos otpora R tako da je struja u toj grani 1 A .

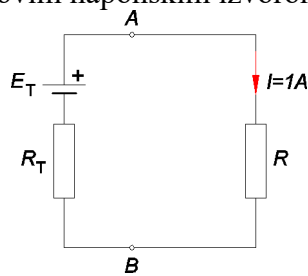
Podatci: $2E_1 = E_2 = 200 \text{ V}$, $E_3 = 300 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$,
 $R_5 = R_6 = 20 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

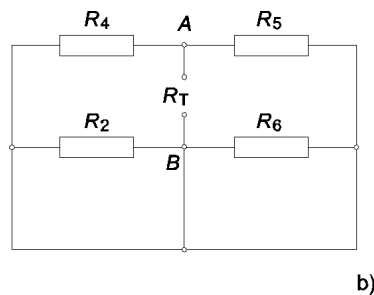
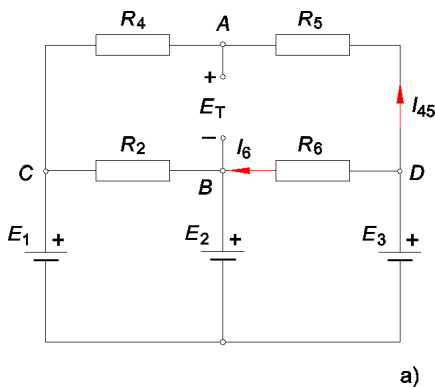
Zadatak će se riješiti tako da se dio električne mreže, izuzev grane s otporom R , nadomjesti Theveninovim naponskim izvorom sukladno slici 13.2.



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

Uporabom II. Kirchhoffova zakona za strujnu petlju (slika 2), dobije se:

$$R = \frac{E_T}{I} - R_T \quad (1)$$



Sl. 3. Nadomjesna shema za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova A - B , ako se izuzme grana s otporom R (slika 3a). Budući da su otpori R_1 i R_3 spojeni paralelno na idealne naponske izvore, E_1 i E_2 , padovi napona na njima ne sudjeluju u raspodjeli potencijala električne mreže. Iz slike 3a vidljivo je:

$$\varphi_C = E_1 \quad , \quad \varphi_B = E_2 \quad , \quad \varphi_D = E_3 \quad (2)$$

Uz pretpostavljeni smjer struje I_{45} dobije se:

$$\varphi_A = \varphi_D - I_{45}R_5 \quad (3)$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = E_3 - E_2 - I_{45}R_5 \quad (4)$$

gdje je:

$$I_{45} = \frac{\varphi_D - \varphi_C}{R_4 + R_5} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (5)$$

Theveninov napon, prema (4), jest: $E_T = 20 \text{ V}$.

Theveninov otpor jest otpor između čvorova A - B , ako se izuzme grana s otporom R i prespoje naponski izvori (slika 3b):

$$R_T = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \quad (= 12 \Omega) \quad (6)$$

Traženi otpor prema (1) jest: $R = 8 \Omega$.

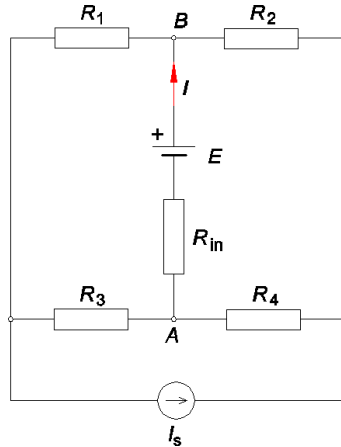


Primjer 13.5.10.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite stupanj iskorištenja naponskog izvora.

Podatci: $E = 10 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$, $R_1 = R_4 = 30 \Omega$, $R_2 = R_3 = 60 \Omega$, $R_{in} = 5 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Stupanj iskorištenja, prema (12.17) jest:

$$\eta = \frac{P_k}{P_k + P_g} \quad (1)$$

gdje je:

$$P_k = P_{iz} - P_g \quad (2)$$

korisna snaga izvora,

$$P_{iz} = EI \quad (3)$$

snaga naponskog izvora prema (12.3),

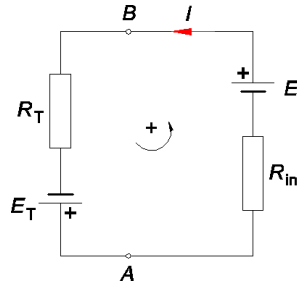
$$P_g = I^2 R_{in} \quad (4)$$

snaga gubitka na unutarnjem otporu R_{in} prema (11.4).

Uvrštavanjem (2), (3) i (4) u (1) dobije se:

$$\eta = 1 - \frac{IR_{in}}{E} \quad (5)$$

Struja I odredit će se tako da se dio električne mreže sa slike 1 nadomjesti Theveninovim naponskim izvorom sukladno slici 13.2.

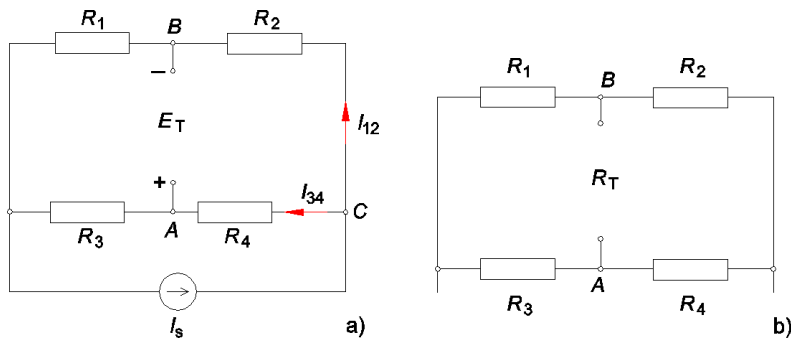


Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

Uporabom II. Kirchhoffova zakona za strujnu petlju (slika 2), tražena struja jest:

$$I = \frac{E_T + E}{R_T + R_{in}} \quad (6)$$

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za proračun Theveninova napona a) i otpora b) Theveninov napon E_T jest napon između čvorova A-B, ako se izuzme grana s naponskim izvorom (slika 3a). Uz pretpostavljene smjerove struja, prema (11.9), dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = I_{12}R_2 - I_{34}R_4 \quad (7)$$

Struje I_{12} i I_{34} odredit će se uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona.

$$\text{čvor } C: \quad I_s - I_{34} - I_{12} = 0 \quad (8)$$

$$\text{petlja } I: \quad I_{12}(R_1 + R_2) - I_{34}(R_3 + R_4) = 0 \quad (9)$$

Rješenje sustava (8) i (9) daje: $I_{12} = I_{34} = 1 \text{ A}$.

Prema (7) Theveninov napon jest: $E_T = 30 \text{ V}$.

Theveninov otpor R_T jest otpor između čvorova A - B , ako se izuzme grana s naponskim izvorom i odspoji strujni izvor (slika 3b).

$$R_T = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (= 45 \Omega) \quad (10)$$

Struja I , prema (6), jest: $I = 0,8 \text{ A}$.

Stupanj iskorištenja, prema (5), jest: $\eta = 0,6$ (= 60%).

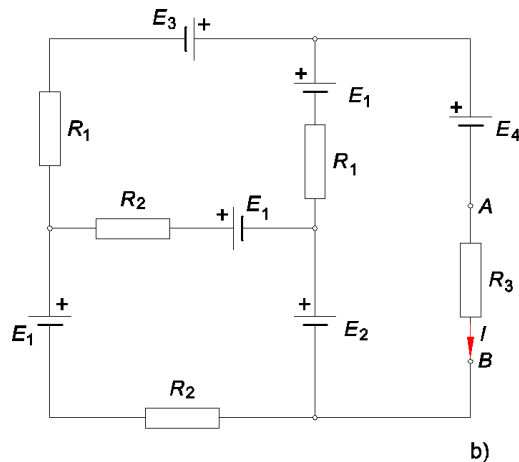


Primjer 13.5.11.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite iznos otpora R_3 tako da se na njemu razvija snaga P .

Podatci: $2R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $4E_1 = E_3 = 20 \text{ V}$, $E_2 = E_4 = 10 \text{ V}$, $P = 3 \text{ W}$.

Rješenje

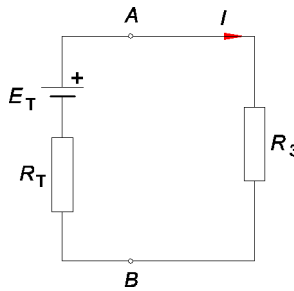


Sl. 1. Shema električne mreže

Razvijena snaga na otporu R_3 , prema (11.4) i slici 2, jest:

$$P = I^2 R_3 \quad (1)$$

Struja I odredit će se na način da se dio električne mreže sa slike 1 nadomjesti Theveninovima naponskim izvorom sukladno slici 13.2.



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovima naponskim izvorom

Uporabom II. Kirchhoffova zakona za strujnu petlju (slika 2), dobije se:

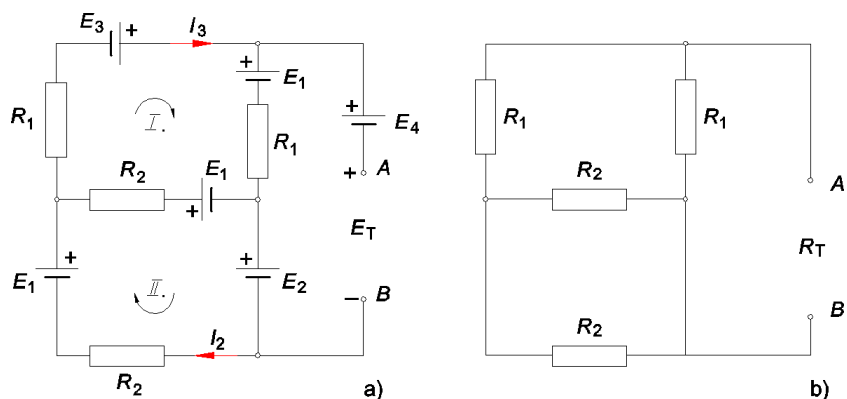
$$I = \frac{E_T}{R_T + R_3} \quad (2)$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se kvadratna jednačba oblika:

$$PR_3^2 + (2PR_T - E_T^2)R_3 + PR_T^2 = 0 \quad (3)$$

čija rješenja određuju traženi otpor R_3 .

Određivanje parametara Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za određivanje Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon jest napon između čvorova A - B ako se izuzme otpor R (slika 3a). S pretpostavljenim smjerovima struja (slika 3a), dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = E_2 + I_3 R_1 + E_1 - E_4 \quad (4)$$

Struja I_3 odredit će se uporabom metode konturnih struja za petlje I. i II.:

$$\text{petlja I.:} \quad (2R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_{II} = E_3 + E_1 - E_1 \quad (5)$$

$$\text{petlja II.:} \quad 2R_2 I_{II} - R_2 I_1 = E_1 - E_1 - E_2 \quad (6)$$

Rješenje sustava (5) i (6) daje: $I_3 = I_1 = 0,5 \text{ A}$.

Theveninov napon, prema (4), jest: $E_T = 10 \text{ V}$.

Theveninov otpor jest otpor između čvorova A - B ako se izuzme otpor R i premoste sve EMS (slika 3b):

$$R_T = \frac{(R_2/2 + R_1)R_1}{R_2/2 + 2R_1} \quad (= 6,67 \Omega) \quad (7)$$

Rješenje (3) daje: $R_{31} = 17,45 \Omega$, $R_{32} = 2,55 \Omega$.

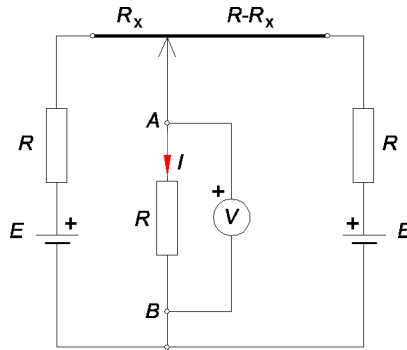


Primjer 13.5.12.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže s tri jednaka otpora od kojih je jedan promjenjiv (klizna žica). Odredite odnos R_x/R na kliznoj žici (slika 1) tako da pad napona na otporu R (mjeri ga voltmetar) bude minimalan kao i njegov iznos.

Podatci: $E = 12\text{ V}$, $R = 4\Omega$, $R_V \rightarrow \infty$.

Rješenje



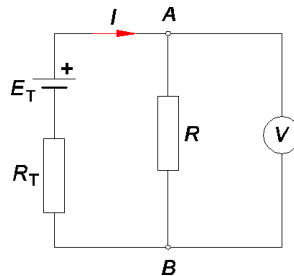
Sl. 1. Shema električne mreže s kliznom žicom

Pad napona na otporu R što ga mjeri voltmetar jest:

$$U = IR \quad (1)$$

gdje je I struja koja ovisi o položaju klizača na kliznoj žici.

Zadatak će se riješiti tako da se dio električne mreže, izuzev grane $A-B$ s otpornikom R , nadomjesti Theveninovim naponskim izvorom sukladno slici 13.2.



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Theveninovim naponskim izvorom

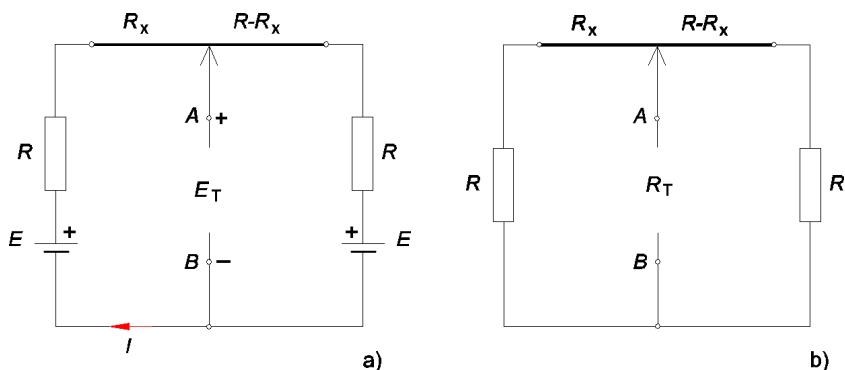
Tražena struja, prema slici 2, jest:

$$I = \frac{E_T}{R + R_T} \quad (2)$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se:

$$U = \frac{E_T}{R + R_T} R \quad (3)$$

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za proračun Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon E_T jest napon između čvorova A - B , ako se izuzme otpor R (slika 3a). Uz pretpostavljeni smjer struje dobije se:

$$E_T = U_{AB_0} = E - I(R + R_x) \quad (4a)$$

ili

$$E_T = E + I(R - R_x) + IR \quad (4b)$$

gdje je I struja strujne petlje (slika 3a).

Budući da petlja ima dva jednaka naponska izvora spojena u protuseriju, slijedi da je struja strujne petlje jednaka nuli, pa je prema (4):

$$E_T = E = 12 \text{ V}$$

Otpor Thevenina jest otpor između čvorova A - B , ako se izuzme otpor R pripadne grane i elektromotorne sile naponskih izvora prespoje (slika 3b).

$$R_T = \frac{(R + R_x)(2R - R_x)}{3R} \quad (5)$$

Budući da se traži takav položaj klizača na kliznoj žici da je pad napona na otporu R minimalan, dakle traži se ekstrem jednadžbe (5), nužno je R_T iskazati odnosom otpora R_x/R :

$$R_T = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_x}{R}\right) \left(2 - \frac{R_x}{R}\right) \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (3) dobije se:

$$U = \frac{3E_T}{3 + \left(1 + \frac{R_x}{R}\right) \left(2 - \frac{R_x}{R}\right)} \quad (7)$$

Nužan uvjet za ekstrem funkcije jest izjednačavanje prve derivacije s nulom:

$$\frac{dU}{d\frac{R_x}{R}} = -3E_T \frac{1 - 2\frac{R_x}{R}}{N^2} = 0 \quad (8)$$

gdje je prikrata N -nazivnik u (7).

Iz (8) slijedi:

$$\frac{R_x}{R} = \frac{1}{2} \quad (9)$$

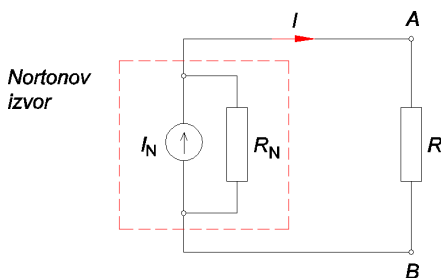
Pad napona na otporu R , prema (3), jest:

$$U = 12 \text{ V} \quad , \text{ uz } R = \frac{3}{4} R = 3 \Omega$$



13.6. Nortonov teorem

Ovaj teorem, kao i Theveninov teorem, omogućuje izračun struje samo u jednoj grani električne mreže. Po Nortonovu teoremu mreža, ili dio mreže, može se zamijeniti strujnim izvorom struje I_N i unutarnjeg otpora R_N (slika 13.3).



Sl. 13.3 Nortonov strujni izvor zamjenjuje dio električne mreže

Struja trošila, prema istoj slici, jest:

$$I = \frac{R_N}{R + R_N} I_N \quad (13.12)$$

gdje je:

I_N - struja nadomjesnog strujnog izvora koja teče kroz granu $A-B$ ako se otpor R odspoji, a stezaljke $A-B$ kratko spoje,

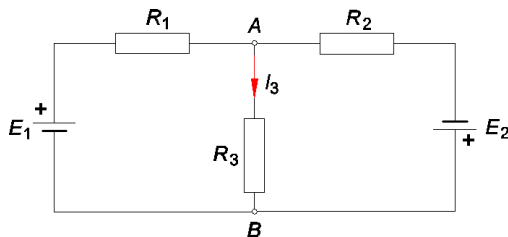
R_N - jest otpor dijela mreže koji se može izmjeriti ili izračunati na otvorenim stezaljkama preostalog dijela mreže ako se naponski izvori prespoje, a strujni izvori odspoje. Slijedi, Nortonov otpor R_N jednak je Theveninovu otporu R_T .

Primjer 13.6.1.

Za shemu električne mreže (slika 1) uporabom Nortonova teorema, odredite struju u grani s otporom R_3 , (vidi primjer 13.5.1).

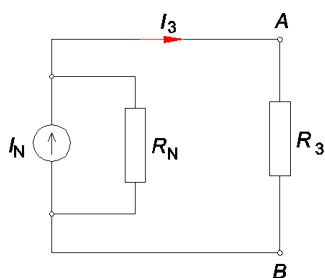
Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Dio električne mreže, izuzev grane s otporom R_3 , nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici **13.3**:

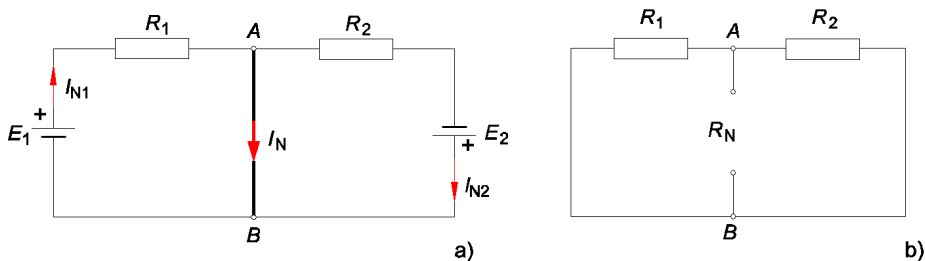


Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Nortonovim strujnim izvorom

Jakost struje kroz otpor R_3 , prema (13.12), jest:

$$I_3 = \frac{R_N}{R_3 + R_N} I_N \quad (1)$$

Slijedi izračun parametara Nortonova strujnog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja I_N jest struja koja teče granom $A-B$ u kratkom spoju (slika 3a).

$$I_N = I_{N1} - I_{N2} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} \quad (= 4,5 \text{ A}) \quad (2)$$

Nortonov otpor jest otpor između čvorova $A-B$ ako se izuzme otpor R_3 i prespoje naponski izvori, slika 3b.

$$R_N = R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 2,4 \Omega) \quad (3)$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobije se: $I_3 = 2 \text{ A}$.

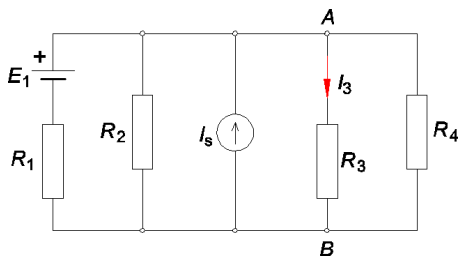


Primjer 13.6.2.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite otpor R_3 tako da njime teče struja jakosti 3 A.

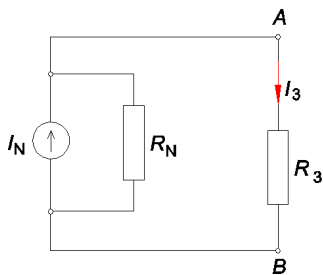
Podatci: $E_1 = 30 \text{ V}$, $I_s = 3 \text{ A}$, $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_4 = 12 \Omega$, $I_3 = 3 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Dio električne mreže, izuzev grane s otporom R_3 , nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3:

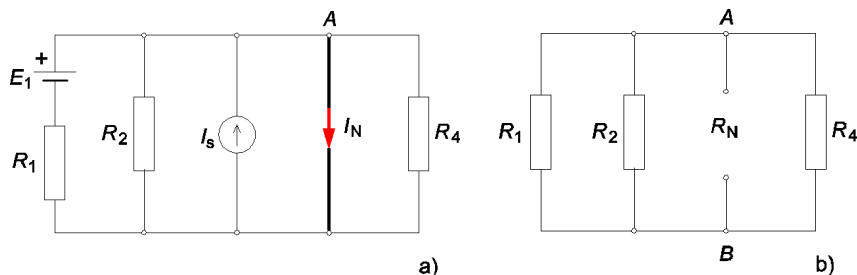


Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Nortonovim strujnim izvorom

Da bi otporom R_3 tekla struja I_3 , prema (13.12), on mora biti iznosa:

$$R_3 = \left(\frac{I_N}{I_3} - 1 \right) R_N \quad (1)$$

Slijedi izračun parametara Nortonova strujnog izvora.



Sl. 3. Nadomjesna shema za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Budući da su čvorovi A - B kratko spojeni, to je Nortonova struja, prema slici 3a:

$$I_N = \frac{E_1}{R_1} + I_s \quad (= 4 \text{ A})$$

Nortonov otpor, prema slici 3b, jest paralelni otpor otpora R_1 , R_2 i R_4 .

$$R_N = \frac{R_1 R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4} \quad (= 6 \Omega) \quad (2)$$

Traženi otpor, prema (1), jest: $R_3 = 2 \Omega$.

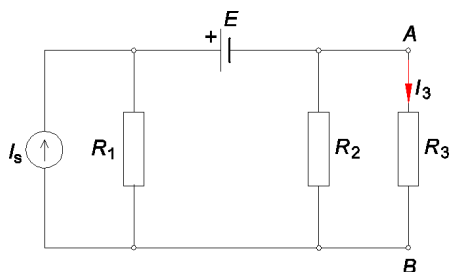


Primjer 13.6.3.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite snagu na otporu R_3 .

Podatci: $E = 24 \text{ V}$, $I_s = 6 \text{ A}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Razvijena snaga na otporu R_3 , prema (11.4), jest:

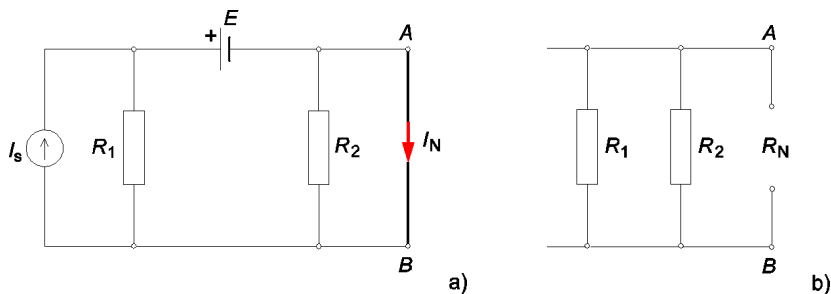
$$P_3 = I_3^2 R_3 \quad (1)$$

Struja I_3 odredit će se uporabom Nortonova teorema. Dio električne mreže lijevo od čvorova A - B zamijenit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3.

Struja I_3 , prema (13.12), jest:

$$I_3 = \frac{R_N}{R_3 + R_N} I_N \quad (2)$$

Određuju se parametri Nortonova strujnog izvora.



Sl. 2. Nadomjesna shema za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja odredit će se metodom superpozicije.

$$I_N = I_{Ns} - I_{NE} \quad (3)$$

gdje su:

$$I_{Ns} = I_s \quad (= 6 \text{ A}) \quad (4)$$

$$I_{NE} = \frac{E}{R_1} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (5)$$

struje što teku kratkospojnom granom ako je EMS kratko spojena, odnosno ako je strujni izvor odspojen (slika 2a).

Nortonova struja, prema (3), jest: $I_N = 2 \text{ A}$.

Nortonov otpor, između čvorova A - B (slika 2b), jest:

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (= 2 \Omega) \quad (6)$$

Tražena struja, prema (2), jest: $I_3 = 0,4 \text{ A}$.

Tražena snaga, prema (1), jest: $P_3 = 1,28 \text{ W}$.

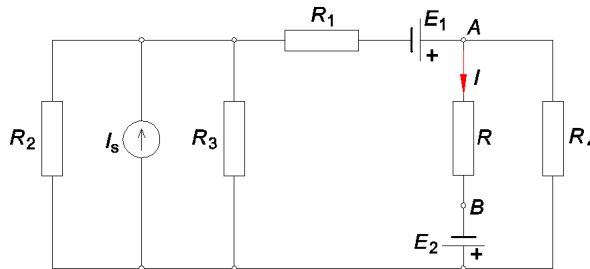


Primjer 13.6.4.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite količinu električne energije koja će se na otporu R u vremenu ΔT transformirati u toplinsku energiju.

Podatci: $E_1 = 16 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $I_s = 8 \text{ A}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 12 \Omega$, $R = 7 \Omega$, $\Delta T = 40 \text{ min}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

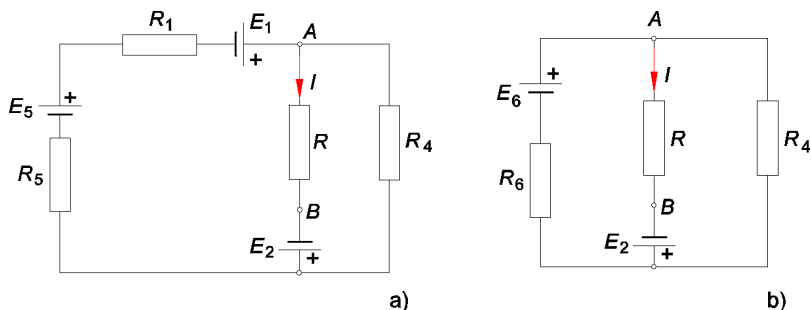
Na otporu R u vremenu ΔT transformirat će se, prema (11.5), količina energije:

$$\Delta Q = I^2 R \Delta T \quad (1)$$

Struja I odredit će se uporabom Nortonova teorema uz prethodno pojednostavljenje sheme električne mreže (slika 1).

Shema (slika 1) može se pojednostavniti:

- strujni izvor I_s s paralelnim otporima R_2 i R_3 zamijenit će se naponskim izvorom E_5 i R_5 (slika 2a).
- dobiveni naponski izvor s izvorom E_1 i R_1 također će se zamijeniti ekvivalentnim naponskim izvorom E_6 i R_6 (slika 2b).



Sl. 2. Pojednostavljena shema sa slike 1

Parametri naponskog izvora, ako su poznati parametri strujnog izvora, prema (12.1) i (12.2) (slika 2a), jesu:

$$R_{\text{in}} = R_5 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (= 2\Omega) \quad (2)$$

$$E = E_5 = I_s R_5 \quad (= 16\text{V}) \quad (3)$$

Serijski spoj dva naponska izvora (slika 2b), jesu:

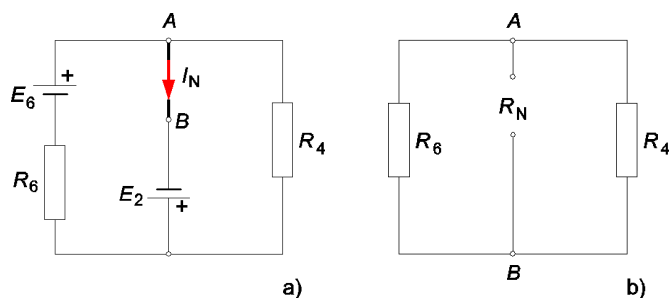
$$E_6 = E_1 + E_5 \quad (= 32\text{V}) \quad (4)$$

$$R_6 = R_1 + R_5 \quad (= 4\Omega) \quad (5)$$

Struja I što teče otporom R , prema slici 13.3 i (13.12), jest:

$$I = \frac{R_N}{R + R_N} I_N \quad (6)$$

Slijedi izračun parametara Nortonova strujnog izvora.



Sl. 3. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja, kroz kratkospojnu granu $A-B$ (slika 3a) odredit će se metodom superpozicije.

$$I_N = I_{E_2} + I_{E_6} = \frac{E_2}{R_{64}} + \frac{E_6}{R_6} \quad (= 10 \text{ A}) \quad (7)$$

gdje je:

I_{E_2}, I_{E_6} struje što ih daju EMS E_2 i E_6 kroz kratkospojnu granu $A-B$,

$$R_{64} = \frac{R_6 R_4}{R_6 + R_4} \quad (= 3 \Omega) \quad (8)$$

paralelni spoj otpora R_6 i R_4 .

Napomena: I_N se može odrediti i metodom konturnih struja.

Nortonov otpor, između čvorova $A-B$ (slika 3b), jest: $R_N = R_{64} = 3 \Omega$.

Tražena struja, prema (6), jest: $I = 3 \text{ A}$.

Oslobodena količina energije na otporu R , prema (1), jest: $\Delta Q = 42 \text{ Wh}$.

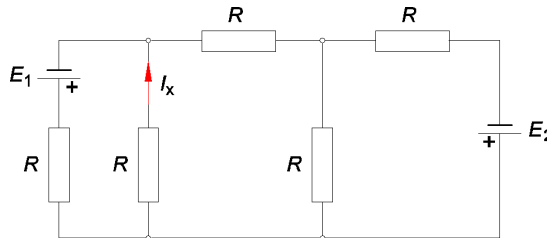


Primjer 13.6.5.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Uporabom Nortonova teorema odredite struju I_x .

Podatci: $E_1 = 2E$, $E_2 = E = 24 \text{ V}$, $R = 7 \Omega$.

Rješenje



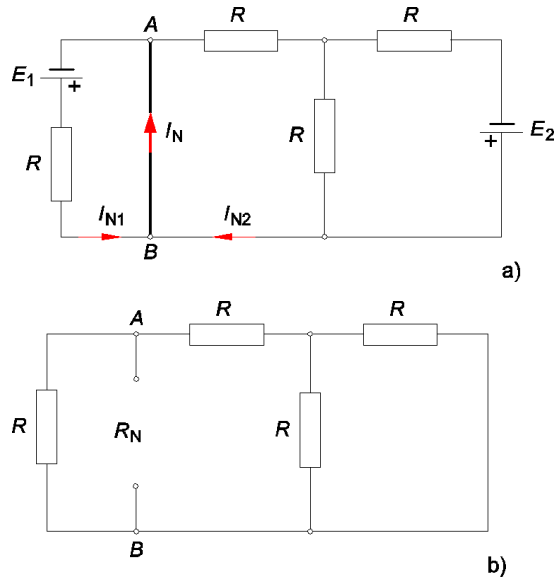
Sl. 1. Shema električne mreže s dva naponska izvora

Dio električne mreže, izuzev grane s otporom R u kojoj se traži struja I_x , nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3.

Nepoznata struja kroz otpor R , prema (13.12), jest:

$$I_x = \frac{R_N}{R + R_N} I_N \quad (1)$$

Određuju se parametri Nortonova strujnog izvora.



Sl. 2. Nadomjesne shema za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja odredit će se metodom superpozicije:

$$I_N = I_{N1} + I_{N2} \quad (2)$$

gdje je:

$$I_{N1} = \frac{E_1}{R} \quad (= 6,86 \text{ A}) \quad (3)$$

struja što je daje izvor E_1 ,

$$I_{N2} = \frac{E_2}{\frac{3}{2}R} \quad (= 2,29 \text{ A}) \quad (4)$$

struja što je daje izvor E_2 .

Nortonova struja, prema (2), jest: $I_N = 9,15 \text{ A}$.

Nortonov otpor, prema slici 2b, jest:

$$R_N = \frac{R(R + \frac{R}{2})}{R + R + \frac{R}{2}} \quad (= 4,2 \Omega) \quad (5)$$

Nepoznata struja, prema (1), jest: $I_x = 3,43 \text{ A}$.

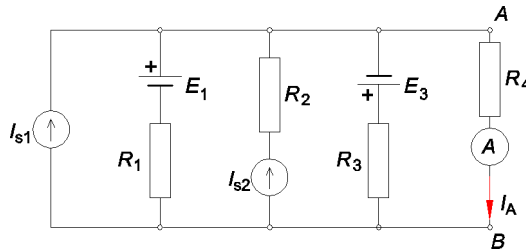


Primjer 13.6.6.

Shema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite snagu strujnog izvora I_{s1} ako ampermetar pokazuje struju I_A .

Podatci: $R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 18 \Omega$, $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 60 \text{ V}$,
 $I_A = 5 \text{ A}$, $I_{s2} = 3 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Snaga strujnog izvora, prema (12.4), jest:

$$P = UI_s \quad (1)$$

gdje je:

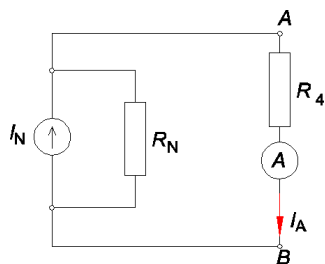
$$U = U_{AB} = I_A R_4 \quad (= 90 \text{ V}) \quad (2)$$

napon strujnog izvora,

$$I_s = I_{s1} \quad (3)$$

struja strujnog izvora.

Izračunava se nepoznata struja I_{s1} . Dio električne mreže, lijevo od čvorova A - B nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3.



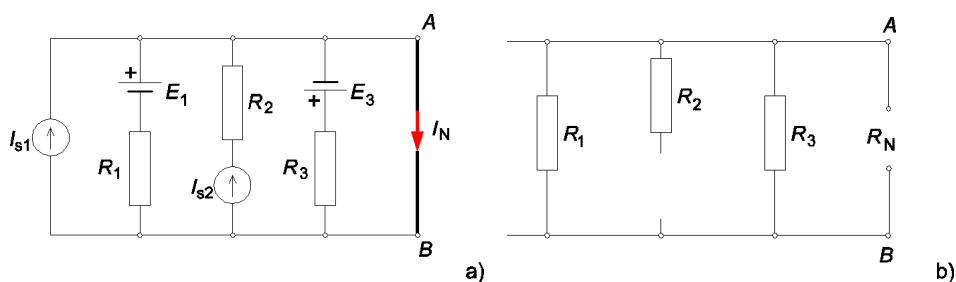
Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Nortonovim strujnim izvorom

Struja Nortonova strujnog izvora, prema (13.2), i slici 2 jest:

$$I_N = \frac{R_4 + R_N}{R_N} I_A \quad (= 12,5 \text{ A}) \quad (4)$$

Nortonov otpor prema slici 3b, jest:

$$R_N = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad (= 12 \Omega)$$



Sl. 3. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja I_N također je (uporabite metodu superpozicije):

$$I_N = I_{s1} + I_{E1} - I_{E3} + I_{s2} \quad (5)$$

gdje su: I_{s1} , I_{s2} , I_{E1} , I_{E3} doprinosi struja strujnih i naponskih izvora kroz kratkospojnu granu A - B .

Napomena: I_N se može odrediti i metodom konturnih struja.

$$I_N = I_{S1} + \frac{E_1}{R_1} + I_{S2} - \frac{E_3}{R_3}$$

Doprinosi pojedinih struja, prema slici 3a, jesu:

$$I_{S1} = I_{s1} \quad (6)$$

$$I_{E1} = \frac{E_1}{R_1} \quad (= 1 \text{ A}) \quad (7)$$

$$I_{S2} = I_{s2} \quad (= 3 \text{ A}) \quad (8)$$

$$I_{E3} = \frac{E_3}{R_3} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (9)$$

Uvrštavanjem (6) do (9) u (5) dobije se:

$$I_N = I_{s1} + 2 \text{ A} \quad (10)$$

Uz prethodno izračunatu Nortonovu struju (4) struja strujnog izvora, prema (10), jest: $I_{s1} = 10,5 \text{ A}$.

Snaga strujnog izvora, prema (1), jest: $P = 945 \text{ W}$.

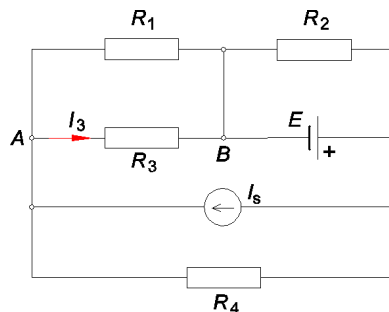


Primjer 13.6.7.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite otpor R_3 u zadanoj mreži tako da se na njemu razvije maksimalna snaga kao i samu snagu.

Podatci: $R_1 = R_4 = 8 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $E = 16 \text{ V}$, $I_s = 6 \text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s idealnim naponskim izvorom

Razvijena snaga na otporu R_3 , prema (11.4), jest:

$$P_{3\text{maks}} = I_3^2 R_3 \quad (1)$$

Na otporu R_3 razvit će se maksimalna snaga ako je trošilo prilagođeno izvoru, tj. prema (12.15), dobije se:

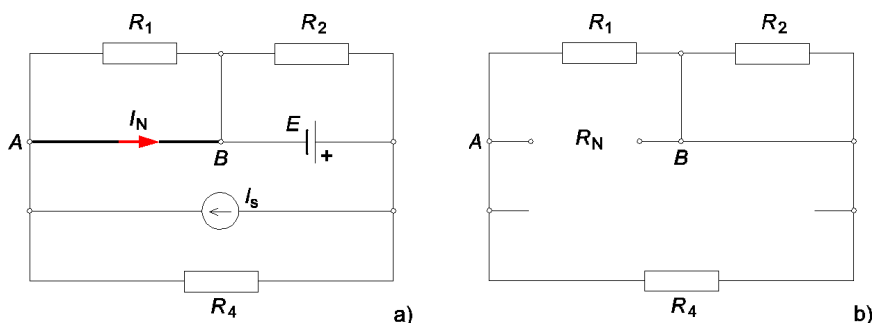
$$R_3 = R_{\text{in}} = R_N \quad (2)$$

Slijedi, dio mreže izuzev grane s otporom R_3 nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3.

Struja kroz otpor R_3 prema (13.12) jest:

$$I_3 = \frac{R_N}{R_3 + R_N} I_N \quad (3)$$

Određuju se parametri Nortonova strujnog izvora.

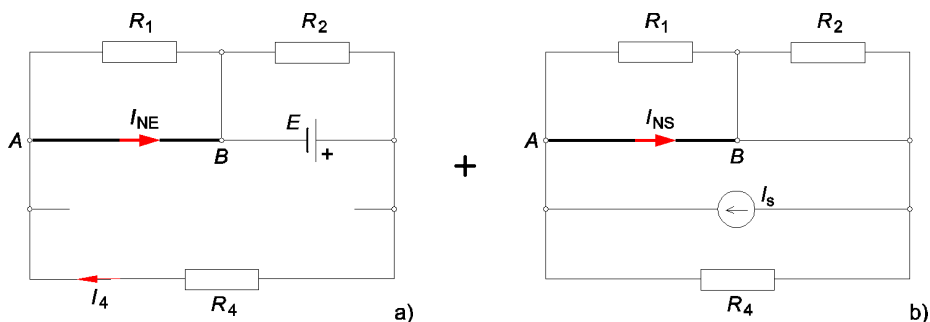


Sl. 2. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja I_N odredit će se metodom superpozicije. Prema (13.8) struja I_N jednaka je zbroju struja pojedinih izvora kroz kratkospojnu granu $A-B$:

$$I_N = I_{NE} + I_{NS} \quad (4)$$

gdje su: I_{NE} , I_{NS} struje naponskog, odnosno strujnog izvora kada je strujni izvor odspojen, odnosno naponski izvor prespojen.



Sl. 3. Nadomjesne sheme za izračun Nortonove struje metodom superpozicije

Doprinos naponskog izvora (slika 3a), jest:

$$I_{NE} = I_4 = \frac{E}{R_4} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (5)$$

Doprinos strujnog izvora (slika 3b), jest:

$$I_{NS} = I_s \quad (= 6 \text{ A}) \quad (6)$$

Uvrštavanjem (5) i (6) u (4) dobije se: $I_N = 8 \text{ A}$.

Nortonov otpor, prema slici 3b, jest:

$$R_N = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \quad (= 4 \Omega)$$

Otpor R_3 , prema (2) jest: $R_3 = 4 \Omega$.

Struja kroz otpor R_3 , prema (3), jest: $I_3 = 4 \text{ A}$.

Maksimalna snaga razvijena na otporu R_3 , prema (1), jest: $P_{3\text{maks}} = 64 \text{ W}$.

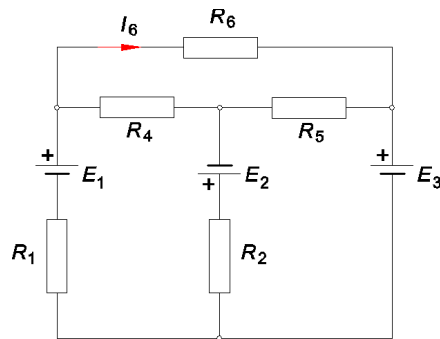


Primjer 13.6.8.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite struju kroz otpor R_6 .

Podatci: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 40 \Omega$, $R_6 = 5 \Omega$, $E_1 = 7 \text{ V}$, $E_2 = 3 \text{ V}$, $E_3 = 2 \text{ V}$.

Rješenje

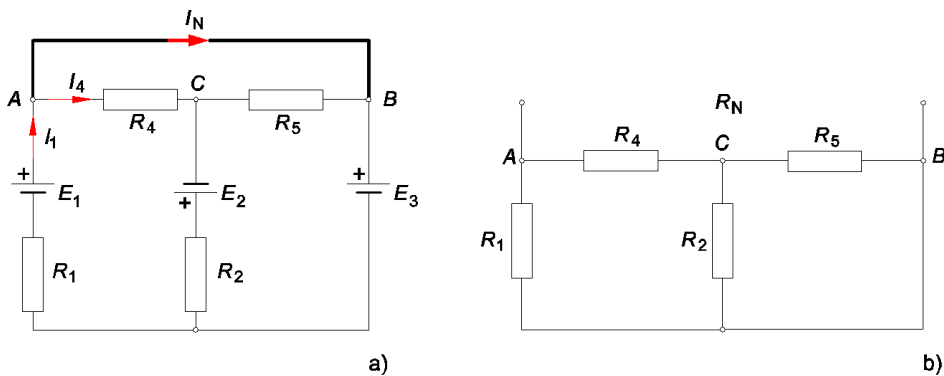


Sl. 1. Shema električne mreže

Dio električne mreže, izuzev grane s otporom R_6 , nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3. Tražena struja, prema (13.12), jest:

$$I_6 = \frac{R_N}{R_6 + R_N} I_N \quad (1)$$

Slijedi proračun parametara Nortonova strujnog izvora.

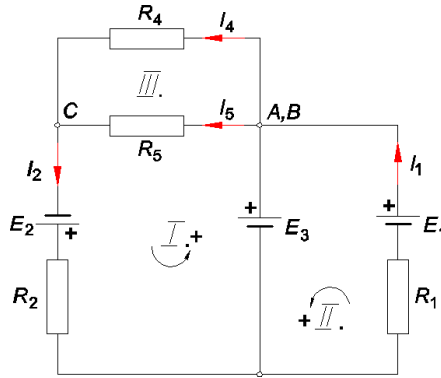


Sl. 2. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja, prema slici 2a, čvor A , jest:

$$I_N = I_1 - I_4 \quad (2)$$

Struje I_1 i I_4 odredit će se uporabom Kirchhoffovih zakona, uz prethodno pojednostavljenje mreže sa slike 2a.



Sl. 3. Pojednostavljena shema sa slike 2a

petlja II.: $E_1 - E_3 = I_1 R_1$ (3)

Tražena struja $I_1 = 0,5 \text{ A}$.

petlja I.: $E_2 + E_3 = I_2 \left(R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)$ (4)

petlja III.: uporabite djeliteelj struje i zakon čvora na čvor C:

$$I_4 = I_2 \frac{R_5}{R_4 + R_5} \quad (5)$$

Sustav (4) i (5) daje: $I_2 = 0,42 \text{ A}$, $I_4 = 0,4 \text{ A}$.

Nortonova struja, prema (2), jest: $I_N = 0,1 \text{ A}$.

Napomena: I_N se može odrediti i metodom konturnih struja.

Nortonov otpor, prema slici 2b, jest:

$$R_N = \frac{(R_4 + R_{25})R_1}{R_4 + R_{25} + R_1} \quad (= 5 \Omega) \quad (6)$$

uz: $R_{25} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} \quad (= 8 \Omega)$

Tražena struja, prema (1), jest: $I_6 = 0,05 \text{ A}$.

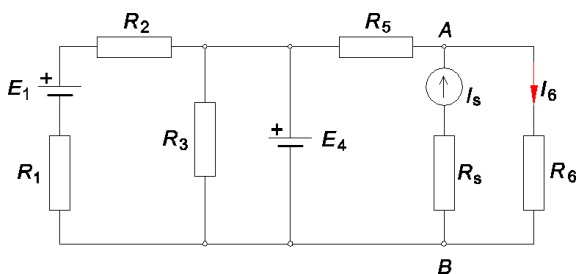


Primjer 13.6.9.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite struju kroz otpor R_6 ako:

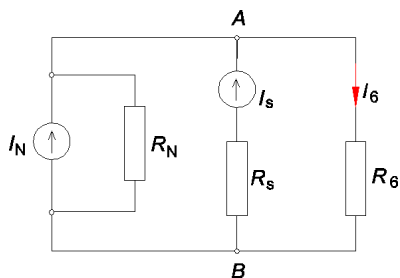
- je smjer struje strujnog izvora kao na slici 1
- se promijeni smjer struje (polaritet).

Podatci: $R_1 = R_3 = R_s = 5\Omega$, $R_2 = R_5 = R_6 = 10\Omega$, $E_1 = 10\text{ V}$, $E_4 = 20\text{ V}$,
 $I_s = 2\text{ A}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Budući da se zadatkom mijenja polaritet strujnog izvora, zadatak će se riješiti tako da se dio električne mreže lijevo od čvorova A - B nadomjesti Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3:



Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Nortonovim strujnim izvorom

a) Tražena struja uporabom metode superpozicije uz primjenu strujnog djelitelja, prema shemi sa slike 2, određena metodom superpozicije, jest:

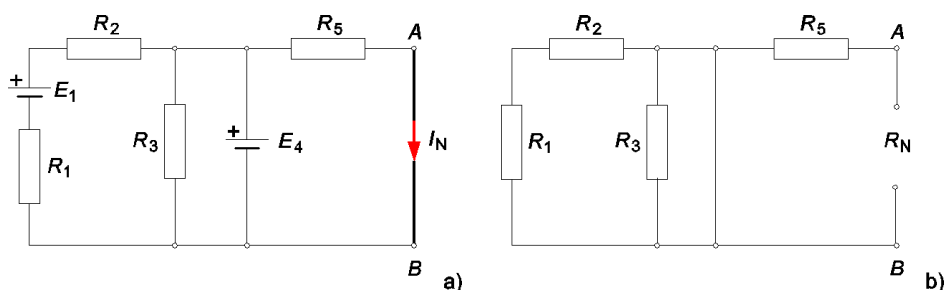
$$I_6 = I_{6I_N} + I_{6I_s} \quad (1a)$$

$$I_6 = \frac{R_N}{R_6 + R_N} (I_N + I_s) \quad (1b)$$

b) Tražena struja, prema shemi sa slike 2 i uz promijenjeni polaritet, jest:

$$I_6 = \frac{R_N}{R_6 + R_N} (I_N - I_s) \quad (2)$$

Određuju se parametri Nortonova strujnog izvora (slika 3).



Sl. 3. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja, prema slici 3a, određena je idealnim naponskim izvorom E_4 :

$$I_N = \frac{E_4}{R_5} \quad (= 2 \text{ A})$$

Nortonov otpor, prema slici 3b, zbog prespajanja idealnog naponskog izvora jest:

$$R_N = R_5 \quad (= 10 \Omega)$$

Tražena struja, prema (1), jest: $I_6 = 2 \text{ A}$.

Tražena struja, prema (2), jest: $I_6 = 0 \text{ A}$.



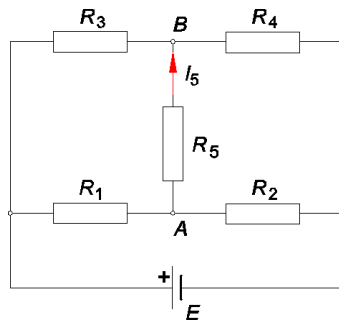
Primjer 13.6.10.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite:

- struju kroz otpor R_5
- struju grane $A-B$ ako otpor $R_5 \rightarrow 0$
- odredite otpor R_1 tako da je struja kroz otpor R_5 jednaka nuli.

Podatci: $E = 72 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$.

Rješenje



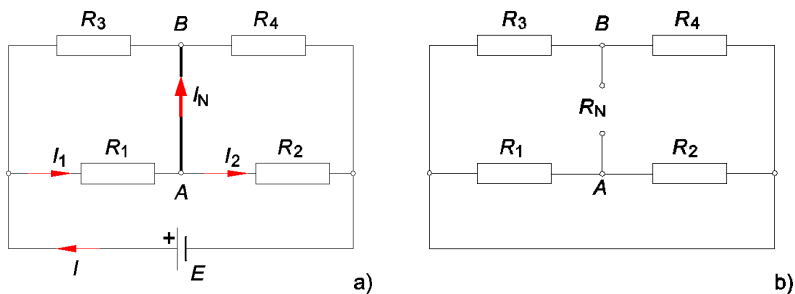
Sl. 1. Shema električne mreže

a) Zadatak će se riješiti uporabom Nortonova teorema. Dio električne mreže, izuzev grane $A-B$, nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3:

Struja I_5 , prema (13.12), jest:

$$I_5 = \frac{R_N}{R_5 + R_N} I_N \quad (1)$$

Slijedi izračun parametara Nortonova strujnog izvora.



Sl. 2. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja I_N , za čvor A prema slici 2a, jest:

$$I_N = I_1 - I_2 \quad (2)$$

gdje je:

$$I_1 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} I \quad (= 8,4 \text{ A}) \quad (3)$$

struja kroz otpor R_1 ,

$$I_2 = \frac{R_4}{R_2 + R_4} I \quad (= 7,2 \text{ A}) \quad (4)$$

struja kroz otpor R_2 ,

$$I = \frac{E}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} \quad (= 12,6 \text{ A}) \quad (5)$$

struja izvora.

Nortonova struja, prema (2), jest: $I_N = 1,2 \text{ A}$.

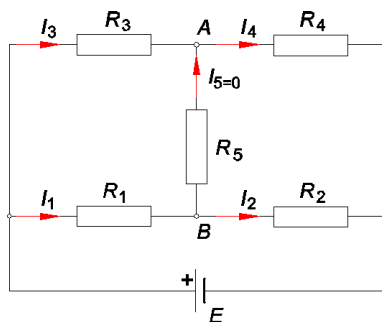
Nortonov otpor, prema slici 2a, jest:

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (= 5 \Omega) \quad (6)$$

Tražena struja, prema (1), jest: $I_5 = 0,6 \text{ A}$.

b) Ako je $R_5 = 0$, tada je prema (1): $I_5 = I_{ks} = I_N = 1,2 \text{ A}$.

c) Da bi struja kroz otpor R_5 bila jednaka nuli, čvorovi A i B moraju biti na istom potencijalu: $\varphi_A = \varphi_B$. Kaže se da je most uravnotežen. Ako su čvorovi A i B na istom potencijalu, tada se prema slici 3 dobije:



Sl. 3. Most je uravnotežen ako su čvorovi A i B na istom potencijalu

$$I_1 R_1 = I_3 R_3 \quad (8a)$$

$$I_2 R_2 = I_4 R_4 \quad (8b)$$

Budući da je, prema slici 3:

$$I_1 = I_2 \quad , \quad I_3 = I_4 \quad (9)$$

Dijeljenjem (8a) s (8b) dobije se:

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (= 9 \Omega) \quad (10)$$



Primjer 13.6.11.

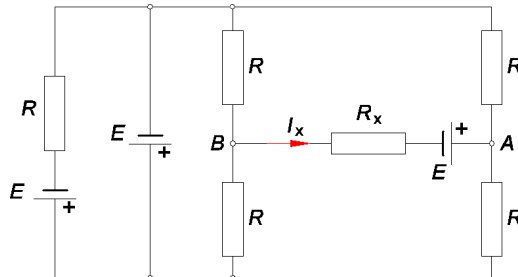
Zadana je shema električne mreže (slika 1).

a) Odredite otpor R_x tako da se na njemu razvije maksimalna snaga kao i tu snagu.

b) Nacrtajte dijagram $P_x = f(R_x)$.

Podatci: $E = 20 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$.

Rješenje

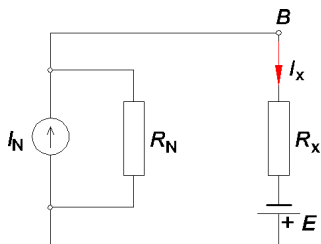


Sl. 1. Shema električne mreže

a) Razvijena snaga na otporu R_x , prema (11.4), jest:

$$P_x = I_x^2 R_x \quad (1)$$

Struja I_x i otpor R_x odedit će se tako da se dio električne mreže, izuzev grane $A-B$, nadomjesti Nortonovim strujnim izvorom (slika 2).

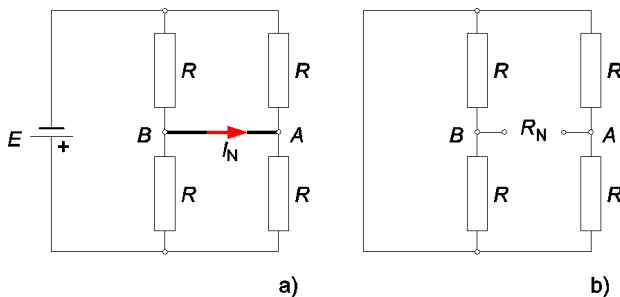


Sl. 2. Dio električne mreže sa slike 1 nadomješten je Nortonovim strujnim izvorom

Tražena struja, prema slici 2, uz zamjenu strujnog izvora naponskim, jest:

$$I_x = \frac{E + I_N R_N}{R_x + R_N} \quad (2)$$

Određuju se parametri Nortonova strujnog izvora.



Sl. 3. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Napomena: Uočite da je zbog idealnog naponskog izvora iz sheme sa sl. 1 izostavljen realni naponski izvor (ovaj izvor ne utječe na struju u grani $A-B$).

Nortonova struja. Shema na slici 3a predstavlja mostni spoj. Budući da je umnožak otpora u dijagonali međusobno jednak, navedeni je most u ravnoteži pa struja na teče granom $A-B$. Slijedi - Nortonova struja jednaka je nuli: $I_N = 0$.

Nortonov otpor prema slici 3b dobije se:

$$R_N = \frac{RR}{R+R} + \frac{RR}{R+R} \quad (= 10\Omega) \quad (3)$$

Snaga izvora, uvrštavanjem (2) u (1) uz $I_N = 0$, dobije se:

$$P_x = E^2 \frac{R_x}{(R_x + R_N)^2} \quad (4)$$

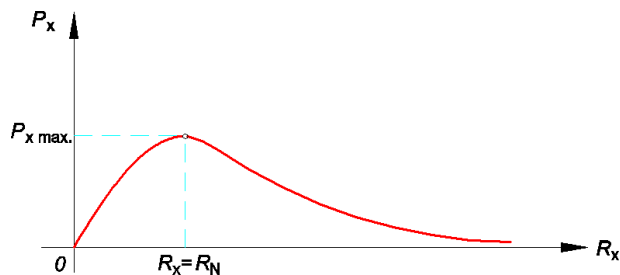
Električni izvor predat će trošilu maksimalnu snagu ako je trošilo prilagođeno izvoru, vidi odjeljak 6.1. Nužan uvjet prilagođenja, prema (12.15), jest:

$$R_x = R_N \quad (=10\Omega) \quad (5)$$

Uvrštavanjem (5) u (4) dobije se:

$$P_{x\text{maks}} = \frac{E^2}{4R_x} \quad (=10\text{ W})$$

b) Dijagram $P_x = f(R_x)$ prikazan je na slici 4.



Sl. 4. Krivulja snage ima maksimalni iznos za $R_x = R_N$

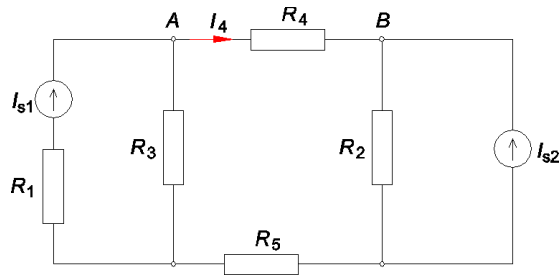


Primjer 13.6.12.

Na slici 1 prikazana je shema električne mreže. Odredite koliko se električne energije pretvori u toplinsku energiju na otporu R_4 u vremenu Δt .

Podatci: $I_{s1} = 30\text{mA}$, $I_{s2} = 10\text{mA}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 300\Omega$, $R_3 = 200\Omega$, $R_4 = 500\Omega$, $R_5 = 1000\Omega$, $\Delta t = 15\text{ min}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

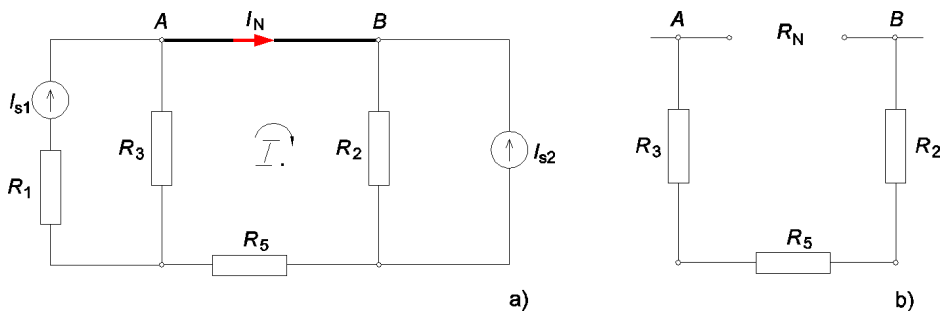
Električna energija koja će se u vremenu Δt pretvoriti u toplinsku energiju, prema (11.5), jest:

$$\Delta W = \Delta Q = I_4^2 R_4 \Delta t \quad (1)$$

Tražena struja odredit će se uporabom Nortonova teorema. Dio električne mreže, izuzev grane A - B , nadomjestit će se Nortonovim strujnim izvorom sukladno slici 13.3. Struja I_4 , prema slici 13.3 i (13.12), jest:

$$I_4 = \frac{R_N}{R_4 + R_N} I_N \quad (2)$$

Određuju se parametri Nortonova strujnog izvora.



Sl. 2. Nadomjesne sheme za proračun Nortonove struje a) i otpora b)

Nortonova struja odredit će se metodom konturnih struja i to za petlju I . (slika 2a), (struje ostalih dviju kontura poznate su - određuju ih strujni izvori).

$$I_1(R_2 + R_3 + R_5) + I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \quad (3)$$

Iz (3) dobije se: $I_N = I_1 = 2 \text{ mA}$.

Nortonov otpor, prema slici 2b, jest:

$$R_N = R_2 + R_3 + R_5 \quad (= 1500 \Omega) \quad (4)$$

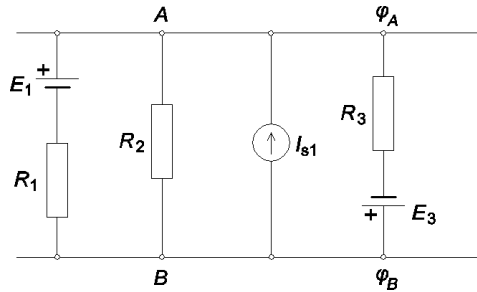
Struja I_4 , prema (2), jest: $I_4 = 1,5 \text{ mA}$.

Tražena količina energije, prema (1), jest: $\Delta W = 0,28 \text{ mWh}$.



13.7. Millmanov teorem

Ovaj teorem omogućuje određivanje napona između dva čvorišta u kojemu se spaja n izvora i trošila, slika 13.4.



Sl. 13.4 Dva čvorišta s n paralelnih grana

Razlika potencijala - napon između čvorova A i B , slika 13.4, prema (17.50), jest:

$$U_{AB} = \frac{\text{alg} \sum_i (E_i G_i + I_{si})}{\sum_i G_i} \quad (13.13)$$

gdje je:

- E_i - elektromotorna sila i -te grane,
- G_i - vodljivost i -te grane,
- I_{si} - strujni izvor i -te grane.

U jednadžbi (13.13) elektromotorna sila E_i i strujni izvor I_{si} pozitivni su ako su usmjereni prema čvoru A , odnosno negativni ako su usmjereni od čvora A .

Struja pojedine grane određuje se pomoću Ohmova zakona za element (granu) strujnog kruga prema (11.8):

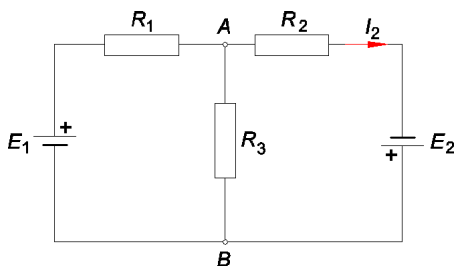
$$I_i = \frac{U_{AB} + \text{alg} \sum_i E_i}{\sum_i R_i} \quad (13.14)$$

EMS u (13.14) je pozitivna ako je njezin smjer jednak smjeru struje grane. Jednadžba je izvedena uz pretpostavku da je čvor A na većem potencijalu od čvora B , odnosno da struja teče od čvora A prema čvoru B .

Primjer 13.7.1.

Za shemu električne mreže (slika 1), uporabom Millmanova teorema, odredite struju u grani s otporom R_2 .

Podatci: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 46\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 26\text{ V}$, $E_2 = 12\text{ V}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Struja u grani s otporom R_2 , prema (13.14), jest:

$$I_2 = \frac{U_{AB} + E_2}{R_2} \quad (1)$$

gdje je:

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (= 6\text{ V}) \quad (2)$$

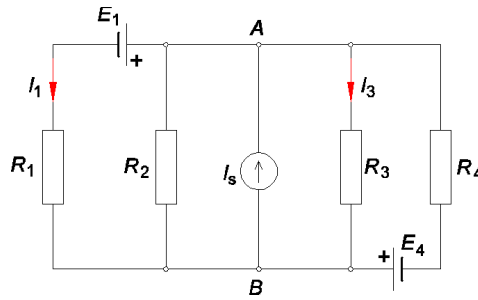
razlika potencijala - napon između čvorova A i B , prema (13.13).

Tražena struja, prema (1), jest: $I_2 = 3\text{ A}$.

**Primjer 13.7.2.**

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite, uporabom Millmanova teorema, struje kroz otpore R_1 i R_3 .

Podatci: $E_1 = 30\text{ V}$, $E_4 = 24\text{ V}$, $I_5 = 3\text{ A}$, $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 12\Omega$.

Rješenje


Sl. 1. Shema električne mreže

Tražene struje prema (13.14) jesu:

$$I_1 = \frac{U_{AB} - E_1}{R_1} \quad (1)$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} \quad (2)$$

gdje je:

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 - E_4 G_4 + I_s}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} \quad (= 3\text{V}) \quad (3)$$

prema (13.13) razlika potencijala između čvorova A i B .

Uvrštavanjem (3) u (1) i (2) dobije se: $I_1 = -0,9\text{ A}$, $I_3 = 1,5\text{ A}$.

Struja kroz otpor R_1 teče od čvora B prema čvoru A .

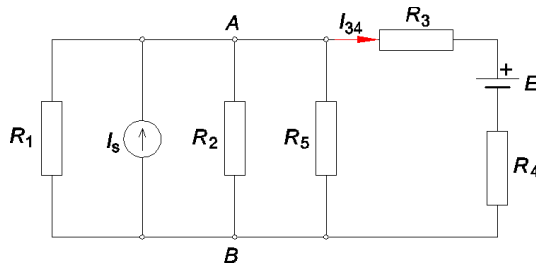

Primjer 13.7.3.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite:

- a) snagu strujnog izvora
- b) snagu na otporu R_4 .

Podatci: $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 24\ \Omega$, $R_3 = 25\ \Omega$, $R_4 = 15\ \Omega$, $R_5 = 12\ \Omega$, $I_s = 0,5\text{ A}$, $E = 60\text{ V}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) Snaga strujnog izvora, prema (12.4), jest:

$$P = U_{AB} I_s \quad (1)$$

gdje je:

$$U_{AB} = \frac{EG_{34} + I_s}{G_1 + G_2 + G_5 + G_{34}} \quad (= 12 \text{ V}) \quad (2)$$

napon između čvorova A i B , prema (13.3),

$$G_{34} = \frac{1}{R_3 + R_4}$$

vodljivost serijskog spoja otpora R_3 i R_4 .

Prema (1) snaga strujnog izvora jest: $P = 6 \text{ W}$.

b) Snaga na otporu R_4 , prema (11.4), jest:

$$P_4 = I_{34}^2 R_4 \quad (3)$$

gdje je:

$$I_{34} = \frac{U_{AB} - E}{R_3 + R_4} \quad (= -1,2 \text{ A}) \quad (4)$$

struja kroz granu s otporima R_3 i R_4 , prema (13.14).

Tražena snaga, prema (3), jest: $P_4 = 21,6 \text{ W}$.



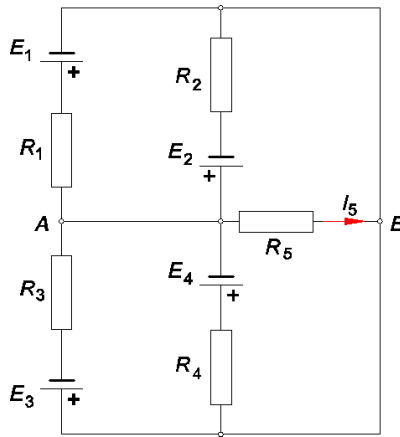
Primjer 13.7.4.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite snagu na otporu R_5 .

Podatci: $E_1 = 20\text{ V}$, $E_2 = 25\text{ V}$, $E_3 = 30\text{ V}$, $E_4 = 4\text{ V}$, $R_1 = 4\ \Omega$,

$R_2 = R_5 = 5\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 2\ \Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Razvijena snaga na otporu R_5 , prema (11.4), jest:

$$P_5 = I_5^2 R_5 \quad (1)$$

gdje je:

$$I_5 = \frac{U_{AB}}{R_5} \quad (2)$$

struja kroz otpor R_5 ,

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 - E_3 G_3 - E_4 G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5} \quad (= 4\text{ V}) \quad (3)$$

Struja trošila, prema (2), jest: $I_5 = 0,8\text{ A}$.

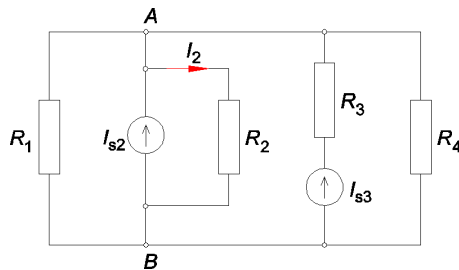
Snaga trošila, prema (1), jest: $P_5 = 3,2\text{ W}$.



Primjer 13.7.5.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite stupanj korisnosti strujnog izvora I_{s2} .

Podatci: $I_{s2} = 3\text{ A}$, $I_{s3} = 4\text{ A}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 3\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Stupanj korisnosti, prema (12.17), jest:

$$\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{P_{s2} - P_{g2}}{P_{s2}} \quad (1)$$

gdje je

$$P_{s2} = I_{s2} U_{AB} \quad (2)$$

snaga realnog strujnog izvora, prema (12.4),

$$P_{g2} = I_2^2 R_2 = \frac{U_{AB}^2}{R_2} \quad (3)$$

gubitak snage na unutarnjem otporu strujnog izvora I_{s2} , prema (11.4),

$$U_{AB} = \frac{I_{s2} + I_{s3}}{G_1 + G_2 + G_4} \quad (= 10\text{ V}) \quad (4)$$

napon strujnog izvora I_{s2} , prema (13.13).

Snaga strujnog izvora, prema (2), jest: $P_{s2} = 30\text{ W}$.

Gubitak snage, prema (3), jest: $P_{g2} = 16,67\text{ W}$.

Stupanj korisnosti, prema (1), jest: $\eta = 0,4443$ (= 44,43%).

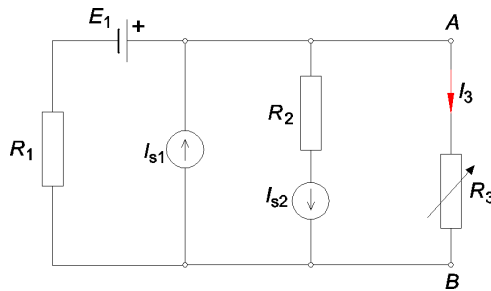


Primjer 13.7.6.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite otpor R_3 tako da se na njemu razvije maksimalna snaga kao i tu snagu.

Podatci: $E_1 = 10\text{ V}$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $I_{s1} = 2\text{ A}$, $I_{s2} = 1\text{ A}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Snaga na otporu R_3 , prema (11.4), jest:

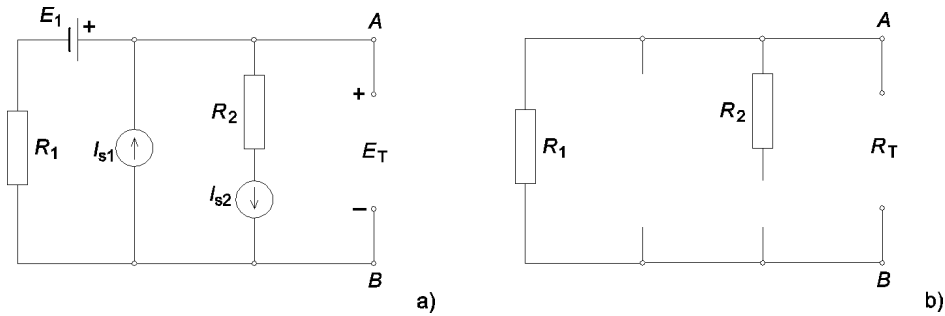
$$P_3 = I_3^2 R_3 \tag{1}$$

Električna mreža predat će otporu R_3 maksimalnu snagu ako je trošilo (otpor R_3) prilagođeno električnoj mreži (izvoru). Slijedi, dio električne mreže, izuzev grane s otporom R_3 , mora se nadomjestiti Theveninovim naponskim izvorom, sukladno slici 13.2. Prema navedenoj slici i uvjetima prijenosa maksimalne snage s izvora na trošilo (12.15), dobije se:

$$I_3 = \frac{E_T}{R_3 + R_T} \tag{2}$$

$$R_3 = R_T \tag{3}$$

Određuju se parametri Theveninova naponskog izvora.



Sl. 2. Nadomjesne sheme za proračun Theveninova napona a) i otpora b)

Theveninov napon odredit će se uporabom Millmanova teorema (13.13) i slike 2a:

$$E_T = U_{AB_0} = \frac{E_1 G_1 + I_{s1} - I_{s2}}{G_1} \quad (= 12V)$$

Theveninov otpor, prema slici 2b, jest: $R_T = R_1 = R_3 = 2\Omega$.

Tražena struja, prema (2), jest: $I_3 = 3A$.

Razvijena snaga, prema (1), jest: $P_3 = P_{3\text{maks}} = 18W$.



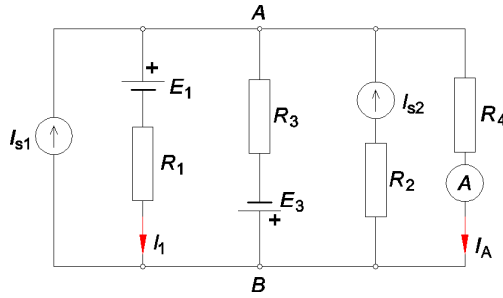
Primjer 13.7.7.

Zadana je shema električne mreže. Ako ampermetar pokazuje jakost struje I_A , odredite:

- a) struju strujnog izvora I_{s1}
- b) snagu naponskog izvora E_1 .

Podatci: $E_1 = 20V$, $E_3 = 60V$, $I_A = 5A$, $I_{s2} = 3A$, $R_1 = R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $R_4 = 18\Omega$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

a) Budući da je poznata struja u grani s otpornikom R_4 , time je određen i napon U_{AB} .

$$U_{AB} = I_A R_4 \quad (= 90V) \quad (1)$$

Nepoznata struja strujnog izvora odredit će se uporabom Millmanova teorema (13.13):

$$U_{AB} = \frac{I_{s1} + E_1 G_1 - E_3 G_3 + I_{s2}}{G_1 + G_3 + G_4} \quad (2)$$

Iz (2) slijedi tražena struja: $I_{s1} = 10,5A$.

b) Snaga naponskog izvora, prema (12.3), jest:

$$P_1 = E_1 I_1 \quad (3)$$

gdje je:

E_1 elektromotorna sila,

$$I_1 = \frac{U_{AB} - E_1}{R_1} \quad (= 3,5A) \quad (4)$$

struja naponskog izvora E_1 , prema (13.14).

Uvrštavanjem (4) u (3) dobije se tražena snaga: $P_1 = 70 \text{ W}$.



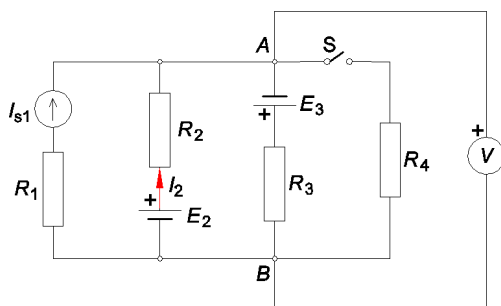
Primjer 13.7.8.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite:

- pokazivanje voltmetra
- snagu naponskog izvora E_2 i
- faktor korisnosti naponskog izvora E_2 .

- a) sklopka S isključena
- b) sklopka S uključena.

Podatci: $I_{s1} = 1A$, $E_2 = 12V$, $E_3 = 16V$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = R_4 = 4\Omega$.

Rješenje

Sl. 1. Shema električne mreže

Pokazivanje voltmetra. Napon između čvorova $A-B$, što je ujedno i pokazivanje voltmetra, prema (13.13), jest:

$$U_{ABa} = \frac{E_2 G_2 - E_3 G_3 + I_{s1}}{G_2 + G_3} \quad (= 4V) \quad (1)$$

$$U_{ABb} = \frac{E_2 G_2 - E_3 G_3 + I_{s1}}{G_2 + G_3 + G_4} \quad (= 3V) \quad (2)$$

Napomena: U slučaju a) otpor R_4 je isključen, a u slučaju b) uključen.

Snaga naponskog izvora E_2 . Snaga (realnog) naponskog izvora, prema (12.3), jest:

$$P_{2a} = E_2 I_{2a} \quad (= 48W) \quad (3)$$

$$P_{2b} = E_2 I_{2b} \quad (= 54W) \quad (4)$$

gdje je:

E_2 elektromotorna sila naponskog izvora (=12 V),

$$I_{2a} = \frac{-U_{ABa} + E_2}{R_2} \quad (= 4 \text{ A}) \quad (5)$$

$$I_{2b} = \frac{-U_{ABb} + E_2}{R_2} \quad (= 4,5 \text{ A}) \quad (6)$$

I_{2a} , I_{2b} struje naponskog izvora E_2 , prema (13.14).

Stupanj korisnosti. Ovaj stupanj, prema (12.17), jest:

$$\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{P_2 - P_{g2}}{P_2} \quad (7)$$

gdje je:

$$P_{ga} = I_{2a}^2 R_2 \quad (= 32 \text{ W}) \quad (8)$$

$$P_{gb} = I_{2b}^2 R_2 \quad (= 40,5 \text{ W}) \quad (9)$$

S izračunatim snagama (3) i (5) te gubitcima (8) i (9) stupanj korisnosti jest:

$$\eta_a = 0,3333 \quad (= 33,33\%)$$

$$\eta_b = 0,25 \quad (= 25\%)$$

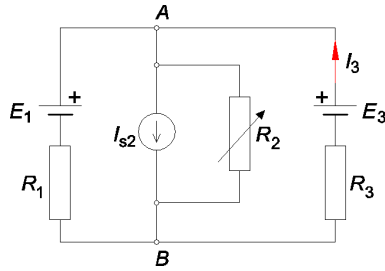


Primjer 13.7.9.

Zadana je shema električne mreže. Odredite unutarnji otpor strujnog izvora tako da se na unutarnjem otporu EMS E_3 oslobodi energija ΔQ u vremenu Δt .

Podatci: $E_1 = 15 \text{ V}$, $E_3 = 16 \text{ V}$, $I_{s2} = 3 \text{ A}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $\Delta Q_3 = 4 \text{ Wh}$, $\Delta t = 15 \text{ min}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Napon U_{AB} , prema (13.13), jest:

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_3 G_3 - I_{s2}}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (1)$$

gdje su nepoznati napon U_{AB} i vodljivost G_2 .

Napon U_{AB} , prema (11.9), jest:

$$U_{AB} = E_3 - I_3 R_3 \quad (2)$$

gdje je:

$$I_3 = \sqrt{\frac{\Delta Q_3}{\Delta t R_3}} \quad (= 2 \text{ A}) \quad (3)$$

struja kroz otpor R_3 , prema (11.5).

Traženi napon, prema (2), jest: $U_{AB} = 8 \text{ V}$.

Traženi otpor, prema (1), jest: $G_2 = 0,05 \text{ S}$ ili $R_2 = 20 \Omega$.



13.8. Elektrostatičke mreže (mreže s kondenzatorima)

Elektrostatičke mreže dijele se na:

- mreže koje sadrže otpornike i kondenzatore i bar jednu granu kroz koju teče struja
- mreže koje sadrže u svakoj grani bar jedan kondenzator.

Analiza elektrostatičkih mreža analogna je analizi linearnih električnih mreža. Kod analize elektrostatičkih mreža valja imati na umu da njima teku struje kratkotrajno dok kod linearnih električnih mreža one teku stalno. Analize u elektrostatičkim mrežama provode se za stacionarno stanje.

I. Kirchhoffov zakon za elektrostatičke mreže

Zbroj naboja na oblogama kondenzatora elektrostatičke mreže spojenih na jednom čvoru jednak je, prema (18.7), nuli, odnosno jednak je, prema (18.8), zbroju početnih naboja na oblogama tih istih kondenzatora.

$$\sum_k Q_k = 0 \quad (13.13)$$

gde je Q_k konačni naboj na kondenzatoru.

$$\text{ili} \quad \sum_k Q_k = \sum_k Q_{0k} \quad (13.14)$$

gdje je Q_{0k} početni naboj na kondenzatoru.

Po dogovoru naboji Q_k i Q_{0k} uzimaju se pozitivnim ako njihov pozitivan predznak gleda u čvor.

II. Kirchhoffov zakon za elektrostatičke mreže

Zbroj elektromotornih sila u zatvorenoj petlji jednak je zbroju napona na kondenzatorima, prema (18.10), jest:

$$\text{alg} \sum_k E_k = \text{alg} \sum_i \frac{Q_i}{C_i} \quad (13.15)$$

gdje je:

- E_k - elektromotorna sila,
- Q_i - naboj kondenzatora,
- C_i - kapacitet kondenzatora.

$EMS E_k$ je pozitivna ako se njen smjer podudara sa smjerom obilaska petlje
Napon $\frac{Q_i}{C_i}$ uzima se kao pozitivan ako se pri obilasku konture nailazi na +
polaritet naboja Q_i .

Millmanov teorem za elektrostatičke mreže

Razlika potencijala između dva čvora s više paralelnih grana, prema (18.15),
jest:

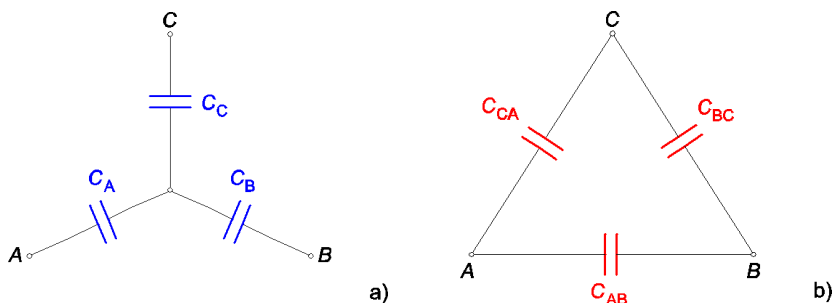
$$\varphi_A - \varphi_B = U_{AB} = \frac{\sum_k E_k C_k}{\sum_k C_k} \quad (13.16)$$

gdje je:

E_k - elektromotorna sila u k -toj grani,
 C_k - kapacitet k -te grane.

$EMS E_k$ se uzima pozitivna ako je usmjerena prema čvoru A , odnosno
negativna ako je usmjerena od čvora A .

Zamjena kapaciteta spoja u zvijezdu spojem u trokut i obrnuto.



Sl. 13.4 Spoj kondenzatora u zvijezdu a) i trokut b)

Relacije zamjene spoja kondenzatora u zvijezdu (Y) sa spojem u trokut (Δ) i
obrnuto, prema slici 13.4 i (18.6a) odnosno (18.17a), jesu:

$Y \rightarrow \Delta$:

$$C_{AB} = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B + C_C} \quad (13.17)$$

$\Delta \rightarrow Y$:

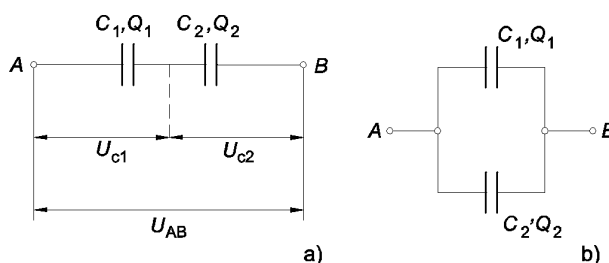
$$C_A = C_{AB} + C_{CA} + \frac{C_{AB}C_{CA}}{C_{BC}} \quad (13.18)$$

Napomena: Kondenzatori se spajaju serijski i paralelno. Ekvivalentni kapacitet navedenih spojeva prema (10.26), odnosno (10.32) I. Svezak, jest:

serijski spoj $\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$, paralelni spoj $C = \sum_{k=1}^n C_k$

Djelitelj napona i naboja

Ako su dva kondenzatora spojena serijski, slika 13.5a,



Sl. 13.5 Serijski spoj kondenzatora a) i paralelni b)

tada je odnos napona na kondenzatorima (na kondenzatorima je jednaki naboj):

$$U_{C1} : U_{C2} = C_2 : C_1 \quad (13.19)$$

Napon jednog kondenzatora prema ukupnom naponu jest:

$$U_{C1} : U_{AB} = C_2 : (C_1 + C_2) \quad (13.20)$$

Ako su dva kondenzatora spojena paralelno, slika 13.5b, tada je odnos naboja na kondenzatorima (kondenzatori su pod istim naponskim prilikama):

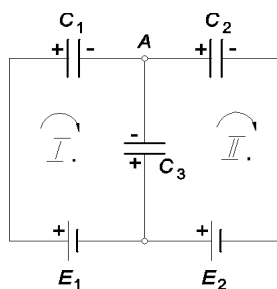
$$Q_1 : Q_2 = C_1 : C_2 \quad (13.21)$$

Primjer 13.8.1.

Zadana je shema elektrostatičke mreže (slika 1). Odredite, primjenom I. i II. Kirchhoffova zakona za elektrostatičke mreže naboje i napone na svakom od kondenzatora. Početno su kondenzatori bili nenabijeni.

Podatci: $E_1 = 6\text{ V}$, $E_2 = 18\text{ V}$, $C_2 = 2C_1 = 4\mu\text{F}$, $C_3 = 6\mu\text{F}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema elektrostatičke mreže

Kao što su se kod rješavanja linearnih mreža pretpostavljali smjerovi struja u granama mreže, tako se u elektrostatičkim mrežama pretpostavljaju polariteti pojedinih obloga kondenzatora (slika 1). Također, moraju se ucrtati obilasci pojedine petlje.

Prema (13.13) i (13.15) dobije se:

$$\text{čvor A:} \quad -Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{petlja I.:} \quad E_1 = U_{C1} - U_{C3} \quad (2a)$$

$$\text{petlja II.:} \quad E_2 = U_{C2} + U_{C3} \quad (2b)$$

Naponi na kondenzatorima, u sustavu jednadžbi (2), mogu se izraziti s pomoću naboja i kapaciteta:

$$E_1 = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_3}{C_3} \quad (3a)$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad (3b)$$

Rješenje sustava (1) i (3) daje:

$$Q_1 = 22 \mu\text{As} \quad U_{C1} = 11 \text{V}$$

$$Q_2 = 52 \mu\text{As} \quad U_{C2} = 13 \text{V}$$

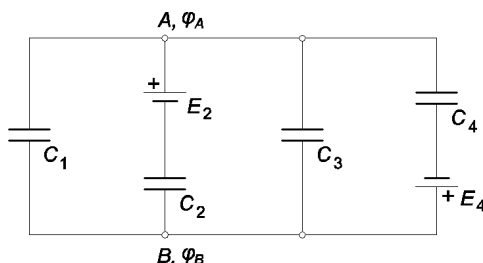
$$Q_3 = 30 \mu\text{As} \quad U_{C3} = 5 \text{V}$$



Primjer 13.8.2.

Zadana je elektrostatička mreža (slika 1). Odredite kapacitet C_1 tako da razlika potencijala - napon među sabirnicama mreže bude U_{AB} . Početno su kondenzatori bili nenabijeni.

Podatci: $U_{AB} = 8\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$, $E_4 = 10\text{ V}$, $C_2 = 5\mu\text{F}$, $C_3 = 0,5\mu\text{F}$,
 $C_4 = 2\mu\text{F}$.

Rješenje


Sl. 1. Shema elektrostatičke mreže

Razlika potencijala među sabirnicama, prema (13.16) - Millmanov teorem za elektrostatičke mreže, jest:

$$U_{AB} = \frac{\sum_k E_k C_k}{\sum_k C_k} \quad (1)$$

Prema slici 1, uvažavajući da je EMS pozitivna ako je usmjerena prema sabirnici (čvoru A) i obrnuto, dobije se:

$$U_{AB} = \frac{E_2 C_2 - E_4 C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \quad (2)$$

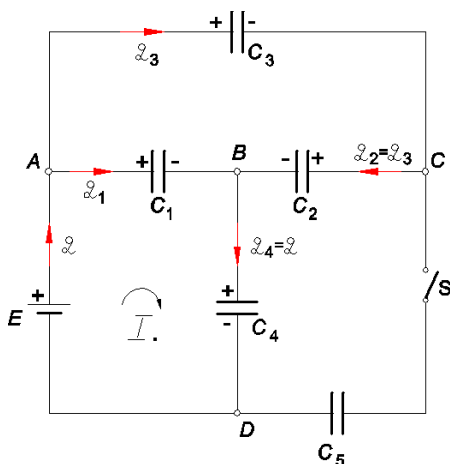
Iz (2) dobije se: $C_1 = 2,5\mu\text{F}$.


Primjer 13.8.3.

Zadana je shema elektrostatičke mreže (slika 1). Odredite naboj i polaritet na svakom od kondenzatora ako je sklopka S otvorena/zatvorena (dva neovisna zadatka). Početno su kondenzatori bili nenabijeni.

Podatci: $E = 40\text{ V}$, $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = C_4 = 4\mu\text{F}$, $C_5 = 8\mu\text{F}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema elektrostatičke mreže (sklopka S otvorena)

a) Sklopka S je otvorena. Zadatak će se riješiti uporabom I. Kirchhoffova zakona (13.13) za elektrostatičke mreže. Na slici su prikazani tokovi naboja (iako samo kratkotrajno).

Budući da je kondenzator kapaciteta C_4 serijski spojen s naponskim izvorom, to je:

$$Q_4 = Q \quad (1)$$

gdje je:

$$Q = C_e E \quad (2)$$

naboj izvora, a

$$C_e = \frac{(C_1 + C_{23})C_4}{C_1 + C_{23} + C_4} \quad (= 2\mu\text{F}) \quad (3)$$

ekvivalentni kapacitet mreže,

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \quad (= 2\mu\text{F})$$

pokrata serijskog spoja.

Naboj izvora, prema (2), jest: $Q = Q_4 = 80 \mu\text{As}$.

Uporabom II. Kirchhoffova zakona (13.15) za petlju I dobije se:

$$E = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_4}{C_4} \quad (4)$$

Iz (4) dobije se: $Q_1 = 40 \mu\text{As}$.

Uporabom I. Kirchhoffova zakona (13.13), za čvor B dobije se:

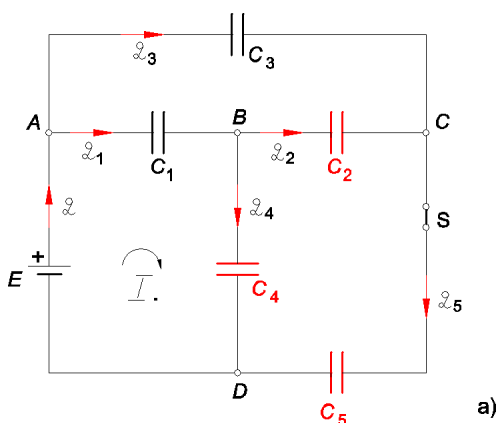
$$Q_1 + Q_2 = Q_4 \quad (5)$$

Iz (5) dobije se: $Q_2 = 40 \mu\text{As}$.

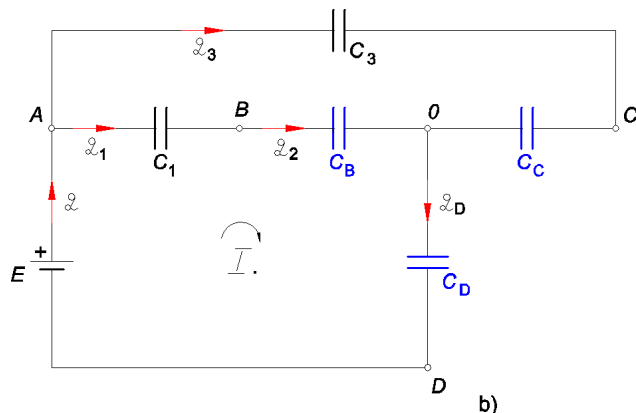
Budući da su kondenzatori C_2 i C_3 spojeni serijski, to je $Q_2 = Q_3 = 40 \mu\text{As}$.

Zaključak: Budući da su naboji na kondenzatorima dobiveni proračunom pozitivni, slijedi da je polaritet na oblogama dobro pretpostavljen.

b) Sklopka S je zatvorena. Za odrediti naboj izvora nužno je odrediti ekvivalentni kapacitet mreže. Kondenzatore kapaciteta C_2 , C_4 i C_5 spojenih u trokut treba prema (13.18) zamijeniti spojem u zvijezdu (slika 2b).



Sl. 2a. Shema električne mreže (sklopka S zatvorena)



Sl. 2b. Shema električne mreže nakon zamjene kondenzatora spojenih u trokut (C_2, C_4 i C_5) sa spojem u zvijezdu ($C_B, C_C, C_D, 0$)

Kapaciteti kondenzatora u spoju zvijezda jesu: $C_B = 10\mu\text{F}$, $C_C = C_D = 20\mu\text{F}$.

Ekvivalentni kapacitet jest:

$$C_e = \frac{(C_{3C} + C_{1B})C_D}{C_{3C} + C_{1B} + C_D} \quad (= 4\mu\text{F}) \quad (6)$$

gdje su:

$$C_{3C} = \frac{C_3 C_C}{C_3 + C_C}, \quad C_{1B} = \frac{C_1 C_B}{C_1 + C_B}$$

prikrate serijskih spojeva.

Naboj izvora:

$$Q = C_e E \quad (= 160\mu\text{As}) \quad (7)$$

Uporabom Kirchhoffovih zakona za elektrostatičke mreže (slika 2b), dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad Q = Q_1 + Q_3 \quad (8)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E = Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_B} \right) + \frac{Q_D}{C_D} \quad (9)$$

gdje je:

$$Q_D = Q = 160 \mu\text{As}$$

Iz (8) i (9) dobije se: $Q_1 = 53,33 \mu\text{As}$, $Q_3 = 106,67 \mu\text{As}$.

Uporabom Kirchhoffovih zakona za elektrostatičke mreže (slika 2a), dobije se:

$$\text{čvor } B: \quad Q_1 = Q_2 + Q_4 \quad (10)$$

$$\text{čvor } C: \quad Q_5 = Q_2 + Q_3 \quad (11)$$

$$\text{petlja } I: \quad E = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_4}{C_4} \quad (12)$$

Rješenje sustava (10) do (12) daje:

$$Q_2 = 0, \quad Q_4 = Q_1 = 53,33 \mu\text{As}, \quad Q_5 = Q_3 = 106,67 \mu\text{As}.$$

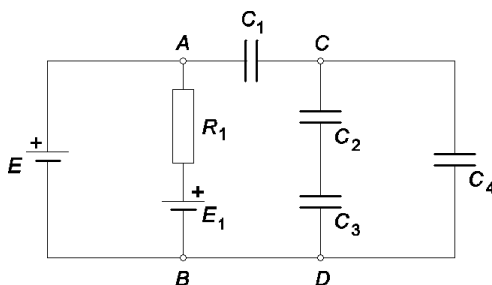


Primjer 13.8.4.

Na slici 1 zadana je shema elektrostatičke mreže. Koliko će se promijeniti akumulirana energija na kondenzatoru C_2 ako se kapacitet kondenzatora C_3 smanji za 50%? Početno su kondenzatori bili nenabijeni.

Podatci: $C_1 = C_2 = C_4 = C$, $C_3 = 2C$.

Rješenje



Sl. 1. Shema elektrostatičke mreže

Budući da je na čvorovima A - B spojen idealni naponski izvor, slijedi da na dio mreže s kondenzatorima realni naponski izvor nema utjecaj (E_1 , R_1).

Akumulirana energija u kondenzatoru kapaciteta C_2 , prema (12.23), I. Svezak, jest:

$$W_e = \frac{1}{2} C_2 U_{C_2}^2 \quad (1)$$

gdje je U_{C_2} napon kondenzatora kapaciteta C_2 .

Napon U_{C_2} odredit će se uporabom djelitelja napona (13.19) i (13.20).

$$U_{C_2} = U_{CD} \frac{C_3}{C_2 + C_3} \quad (2)$$

gdje je:

$$U_{CD} = E \frac{C_1}{C_1 + C_{234}} \quad (3)$$

napon serijskog spoja kondenzatora kapaciteta C_2 i C_3 , određen je uporabom djelitelja napona između C_1 i kombinacije C_2, C_3, C_4 ,

$$C_{234} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_4$$

ekvivalentni kapacitet kombinacije C_2, C_3, C_4 .

a) Za $C_3 = 2C$ dobije se:

$$U_{CD} = \frac{3}{8} E \quad , \quad U_{C_2} = \frac{1}{4} E \quad , \quad W_{ea} = \frac{1}{32} CE^2$$

b) Za $C_3 = C$ dobije se:

$$U_{CD} = \frac{2}{5} E \quad , \quad U_{C_2} = \frac{1}{5} E \quad , \quad W_{eb} = \frac{1}{50} CE^2$$

Promjena energije jest:

$$\frac{W_{eb} - W_{ea}}{W_{ea}} = -0,36 \text{ ili } -36\%$$

Predznak minus ukazuje da se energija smanjila za 36 %.

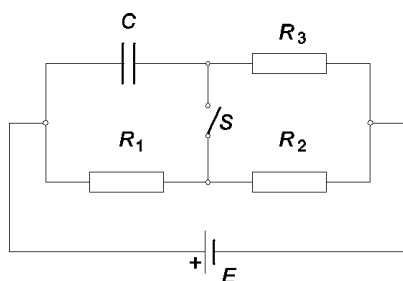


Primjer 13.8.5.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Odredite količinu naboja na kondenzatoru kapaciteta C ako je sklopka S otvorena/zatvorena. Početno je kondenzator bio nenabijen.

Podatci: $E = 44 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $C = 4 \mu\text{F}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Naboj na kondenzatoru, prema **(10.1)**, I. Svezak, jest:

$$Q = CU \tag{1}$$

a) Sklopka S je otvorena. Ako je sklopka otvorena, napon na kondenzatoru jednak je EMS izvora (naponski izvor je idealan, kondenzator je prekid u krugu).

$$U = E \tag{2}$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobije se: $Q = 176 \mu\text{As}$.

b) Sklopka S je zatvorena. Ako je sklopka zatvorena, tada je napon na kondenzatoru jednak padu napona na otporu R_1 .

$$U = IR_1 \tag{3}$$

gdje je:

$$I = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad (= 8 \text{ A}) \tag{4}$$

struja što teče otpornikom R_1 i jednaka je struji izvora.

Uvrštavanjem (4) u (3) dobije se: $U = 32 \text{ V}$.

Naboj na kondenzatoru jest: $Q = 128 \mu\text{As}$.

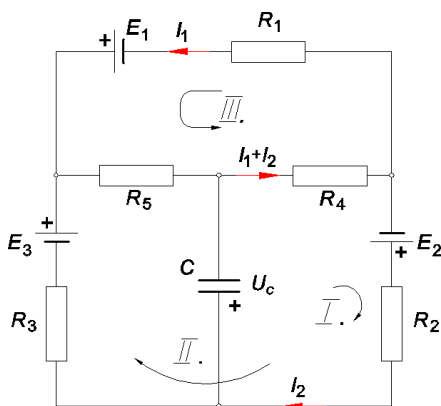


Primjer 13.8.6.

Zadana je shema električne mreže s kondenzatorom (slika 1). Odredite polaritet kondenzatora i naboj na njemu.

Podatci: $E_1 = 50 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $E_3 = 36 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = R_5 = 6 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 8 \Omega$, $C = 5 \mu\text{F}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže s otpornicima i kondenzatorom

Naboj na oblogama kondenzatora jest:

$$Q = CU_C \quad (1)$$

Napon na kondenzatoru dobit će se uporabom II. Kirchhoffova zakona za petlju I. uz pretpostavljene smjerove struja i polaritet kondenzatora:

$$U_C = E_2 - I_2 R_2 - (I_1 + I_2) R_4 \quad (2)$$

Struje I_1 i I_2 odredit će se uporabom metode konturnih struja:

$$\text{petlja II.:} \quad E_2 + E_3 = I_{\text{II}}(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + I_{\text{III}}(R_4 + R_5) \quad (3)$$

$$\text{petlja III.:} \quad E_1 = I_{\text{III}}(R_1 + R_4 + R_5) + I_{\text{II}}(R_4 + R_5) \quad (4)$$

Sustav (3) i (4) daje: $I_{II} = 1\text{ A}$, $I_{III} = 2\text{ A}$.

Struje grana jesu: $I_1 = I_{III} = 2\text{ A}$, $I_2 = I_{II} = 1\text{ A}$.

Iz (2) dobije se: $U_C = -10\text{ V}$. Slijedi, polaritet kondenzatora je krivo pretpostavljen.

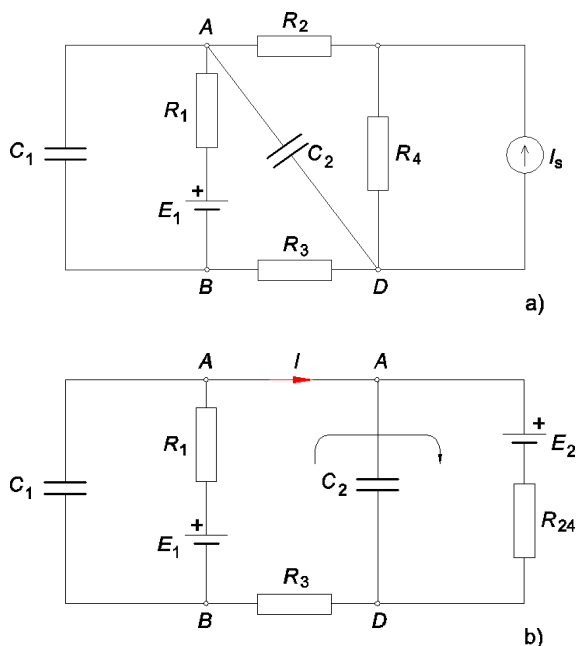
Naboj na oblogama kondenzatora, prema (1), jest: $Q = -50\mu\text{As}$.



Primjer 13.8.7.

Zadana je shema električne mreže (slika 1a). Odredite koliki mora biti kapacitet C_2 da ukupna količina naboja na kondenzatorima C_1 i C_2 bude Q_{12} . Podatci: $E_1 = 40\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $I_s = 5\text{ A}$, $C_1 = 0,5\mu\text{F}$, $Q_{12} = 54\mu\text{As}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže a) i nakon preuređenja b)

Dio električne mreže, sa strujnim izvorom, zamijenit će se naponskim izvorom, slika 1b. Prema oznakama na slici 1a i 1b i (12.1) i (12.2) dobije se:

$$E_2 = I_s R_4 \quad (= 20\text{ V}) \quad (1)$$

$$R_{is} = R_4 \quad (= 4\Omega) \quad (2)$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 \quad (= 5\Omega) \quad (3)$$

Budući da kondenzatori kapaciteta C_1 i C_2 nisu paralelno spojeni (jer su na različitim naponima U_{AB} i U_{AD}), ali je iz uvjeta zadatka dan ukupni naboj na njima Q_{12} , slijedi:

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2 \quad (4)$$

gdje je:

$$Q_1 = C_1 U_{AB} \quad , \quad Q_2 = C_2 U_{AD} \quad (5)$$

Jednadžbe (4) i (5) daju:

$$C_2 = \frac{Q_{12} - C_1 U_{AB}}{U_{AD}} \quad (6)$$

gdje je:

$$U_{AB} = E_1 - IR_1, \quad U_{AD} = E_2 + IR_{24} \quad (7)$$

napon između čvorova $A-B$ i $A-D$,

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_{24} + R_3} \quad (= 2\text{ A}) \quad (8)$$

struja petlje prema slici 1b.

Napon U_{AB} i U_{AD} , prema (7), jesu: $U_{AB} = 36\text{ V}$, $U_{AD} = 30\text{ V}$.

Razlikuju se za napon $U_{BD} = IR_3 = 6\text{ V}$

Traženi kapacitet, prema (6), jest: $C = 1,2\mu\text{F}$.

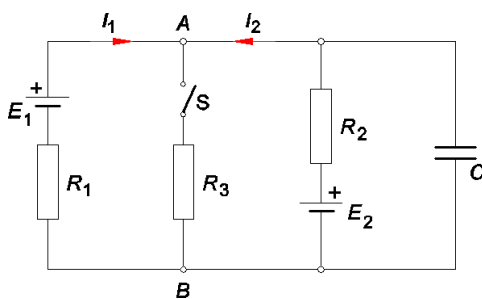


Primjer 13.8.8.

Schema električne mreže prikazana je na slici 1. Odredite koliko se promijeni naboj na kondenzatoru ako se zatvori sklopka S .

Podatci: $E_1 = 50\text{ V}$, $E_2 = 68\text{ V}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $C = 2\mu\text{F}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema električne mreže

Promjena naboja na kondenzatoru nakon zatvaranja sklopke S jest:

$$\Delta Q = Q_b - Q_a \quad (1)$$

gdje su: Q_a , Q_b količine naboja na kondenzatoru prije/nakon zatvaranja sklopke S . Jednadžba (1) može se pisati u obliku:

$$\Delta Q = C(U_b - U_a) \quad (2)$$

gdje su: U_a , U_b razlike potencijala među čvorovima kada je sklopka S otvorena/zatvorena.

Traženi naponi, odredit će se uporabom Millmanova teorema (13.3).

a) Sklopka S je otvorena.

$$U_a = U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2} \quad (= 56 \text{ V}) \quad (3)$$

b) Sklopka S je zatvorena.

$$U_b = U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (= 48 \text{ V}) \quad (4)$$

Promjena naboja na kondenzatoru, prema (2), jest: $\Delta Q = -16 \mu\text{As}$.

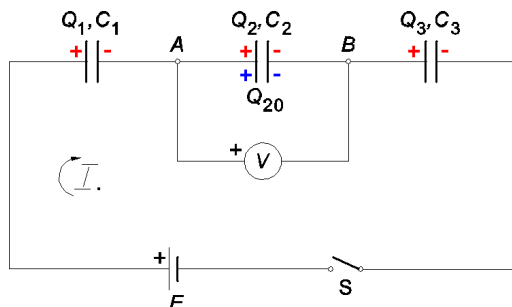
Predznak minus znači da se naboj smanjio zatvaranjem sklopke.



Primjer 13.8.9.

Zadana je shema elektrostatičke mreže (slika 1). Prije ukapčanja sklopke S izmjeren je napon na drugom kondenzatoru U_{20} , dok je napon na ostalim kondenzatorima bio jednak nuli. Odredite napone na svakom od kondenzatora nakon ukapčanja sklopke S .

Podatci: $E = 20 \text{ V}$, $U_{20} = 2 \text{ V}$, $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 12 \mu\text{F}$.

Rješenje

Sl. 1. Shema elektrostatičke mreže (oznake naboja: plavo - prije, crveno - nakon zatvaranja sklopke)

Napon na kondenzatoru, prema (10.1), I. Svezak, jest:

$$U = \frac{Q}{C} \quad (1)$$

Uporabom I. i II. Kirchhoffova zakona (13.14) i (13.15) za zadanu mrežu dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad -Q_1 + Q_2 = Q_{20} \quad (2)$$

$$\text{čvor } B: \quad -Q_2 + Q_3 = -Q_{20} \quad (3)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad (4)$$

gdje je:

$$Q_{20} = C_2 U_{20} \quad (= 12 \mu\text{As}) \quad (5)$$

početni naboj na drugom kondenzatoru.

Jednadžbe (2) i (3) daju:

$$Q_1 = Q_3 \quad (6)$$

što je bilo i za očekivati - u serijskom spoju svi kondenzatori imaju jednak naboj (osim kondenzatora s početnim nabojima).

Uvrštavanjem Q_2 iz (3) u (4) uz uvjet (6) dobije se:

$$Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = E - \frac{Q_{20}}{C_2} \quad (7)$$

Iz (7) dobije se $Q_1 = 36 \mu\text{As}$.

Ostali naboji na kondenzatorima su $Q_3 = Q_1$, $Q_2 = 48 \mu\text{As}$.

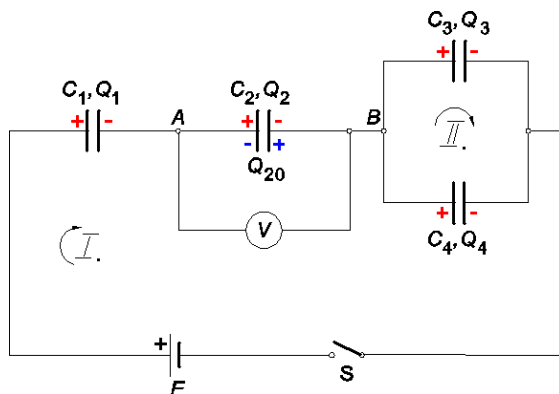
Traženi naponi, prema (1), jesu: $U_1 = 9 \text{ V}$, $U_2 = 8 \text{ V}$, $U_3 = 3 \text{ V}$.



Primjer 13.8.10.

Zadana je shema električne mreže (slika 1). Prije zatvaranja sklopke S izmjeren je napon U_{20} na kondenzatoru kapaciteta C_2 , dok je napon na ostalim kondenzatorima bio jednak nuli. Poslije zatvaranja sklopke S izmjeren je napon U_2 na istom kondenzatoru. Odredite kapacitet C_4 .
Podatci: $E = 50 \text{ V}$, $U_{20} = 40 \text{ V}$, $U_2 = 20 \text{ V}$, $C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $Q_3 = 80 \mu\text{As}$.

Rješenje



Sl. 1. Shema elektrostatičke mreže (oznake naboja: plavo - prije, crveno - nakon zatvaranja sklopke)

Kapacitet C_4 , prema (10.2), I. Svezak, jest:

$$C_4 = \frac{Q_4}{U_4} \quad (1)$$

gdje je:

Q_4 - naboj na kondenzatoru C_4 ,

U_4 - napon na kondenzatoru kapaciteta C_4 .

Primjenom I. i II. Kirchhoffova zakona za elektrostaticke mreže (13.13) i (13.15) dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad -Q_1 + Q_2 = -Q_{20} \quad (2)$$

$$\text{čvor } B: \quad -Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_{20} \quad (3)$$

gdje je:

$$Q_{20} = C_2 U_{20} \quad (= 80 \mu\text{As}) \quad (4)$$

početni naboj na kondenzatoru kapaciteta C_2 ,

$$Q_2 = C_2 U_2 \quad (= 40 \mu\text{As})$$

konačni naboj na kondenzatoru kapaciteta C_2 .

Iz (2) i (3) dobije se: $Q_1 = 120 \mu\text{As}$ i

$$Q_1 = Q_3 + Q_4 \quad (5)$$

$$\text{petlja } I.: \quad E = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad (6)$$

$$\text{petlja } II.: \quad \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_4}{C_4} \quad (7)$$

Sustav jednažbi (5), (6) i (7) daje:

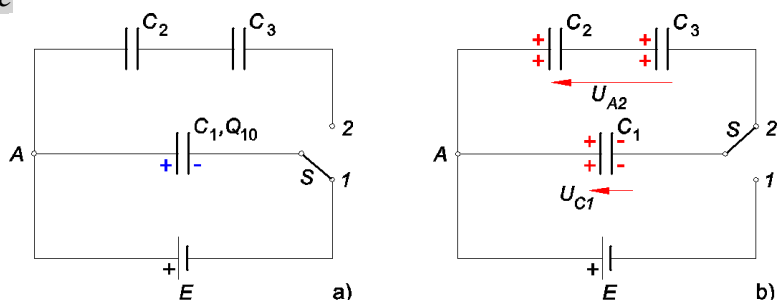
$$C_4 = 4 \mu\text{F}$$



Primjer 13.8.11.

Zadana je shema elektrostatičke mreže (slika 1a). Prebaci li se sklopka S iz položaja 1 u položaj 2 (slika 1b), odredite energiju akumuliranu u elektrostatičkom polju kondenzatora kapaciteta C_2 . Kondenzatori C_2 i C_3 prije prebacivanja sklopke nisu bili nabijeni.

Podatci: $U = 1500 \text{ V}$, $C_1 = 20 \mu\text{F}$, $C_2 = 15 \mu\text{F}$, $C_3 = 30 \mu\text{F}$.

Rješenje


Sl. 1. Shema električne mreže prije a) i nakon b) prebacivanja sklopke iz položaja 1 u položaj 2

Energija akumulirana u električnom polju 2. kondenzatora, prema (12.23), I. Svezak, jest:

$$W_{e2} = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} \quad (1)$$

Određuju se ili napon U_2 ili naboj Q_2 .

a) Sklopka S je u položaju 1. Samo je kondenzator kapaciteta C_1 priključen na električni izvor. Slijedi:

$$U_1 = E = 1500 \text{ V} \quad (2)$$

$$Q_{10} = C_1 U_1 \quad (= 30 \text{ mAs}) \quad (3)$$

b) Sklopka S je u položaju 2. Prebacivanjem sklopke iz položaja 1 u položaj 2 kondenzator kapaciteta C_1 postaje električni izvor kondenzatorima kapaciteta C_2 i C_3 . Primjenom I. i II. Kirchhoffova zakona dobije se:

$$\text{čvor } A: \quad Q_{10} = Q_1 + Q_{23} \quad (4)$$

gdje je:

Q_1 - preostali naboj na kondenzatoru kapaciteta C_1 ,
 Q_{23} - dio naboja Q_{10} što ga je kondenzator kapaciteta C_1 predao serijskom spoju C_2, C_3 .

$$\text{petlja:} \quad U_{C_1} = U_{A_2} \quad (5a)$$

gdje je:

U_{C_1} - napon kondenzatora kapaciteta C_1 ,
 U_{A_2} - napon na serijskom spoju C_2 i C_3 .

Jednadžbu (5a) može se pisati u obliku:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \quad (5b)$$

gdje je:

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \quad (= 10 \mu\text{F}) \quad (6)$$

Sustav (4) i (5b) daju:

$$Q_{23} = \frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}} \quad (= 10 \text{ mAs}) \quad (7)$$

Budući da su kondenzatori kapaciteta C_2 i C_3 serijski spojeni, to je:

$$Q_{23} = Q_2 = Q_3 \quad (= 10 \text{ mAs}) \quad (8)$$

Uvrštavanjem dobijenih rezultata u (1) dobije se: $W_{e_2} = 3,33 \text{ Ws}$.



LITERATURA

- [1] Nasar, S. A. : Schaum's 3000 solved problems in electric circuits, Publication, Data, McGraw - Hill, New York, 1998.
- [2] Božilović, H. i drugi: Zbirka zadataka iz osnova elektrotehnike I, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- [3] Đekić, M., Ristanović, Z. : Zbirka rešenih zadataka iz osnova elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [4] Jajac, B. : Teorijske osnove elektrotehnike, Graphis, Zagreb, 2002.
- [5] Kuzmanović, B. : Osnove elektrotehnike I, Element, Zagreb, 2000.
- [6] Surutka, J. : Osnovi elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- [7] Lončar, J. : Osnovi elektrotehnike I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [8] Nojman, L. R. , Kalantarov, P. L. : Teoriski osnovi elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1951.
- [9] Pekić, N. , Nađ, V. : Zbirka riješenih ispitnih zadataka iz OE, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [10] Pinter, V. : Osnove elektrotehnike I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [11] Popović, B. : Osnovi elektrotehnike I, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [12] Šehović, E. i drugi: Osnove elektrotehnike, Zbirka primjera, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
SVEUČILIŠNA KNJIŽNICA
U SPLITU

UDK 537.2(075.8)(076)

JAJAC, Branislav
Zbirka riješenih zadataka iz osnova
elektrotehnike / Branislav Jajac,
Nedjeljka Grulović ; <crteži Ivanka
Jajac>. - Split : Fakultet elektrotehnike,
strojarstva i brodogradnje, 2022. -
(Udžbenici Sveučilišta u Splitu = Manualia
Universitatis studiorum Spalatensis)

Sv. 2: Istosmjerne struje. - 2022
Bibliografija
ISBN 978-953-290-121-4

1. Grulović, Nedjeljka
I. Elektrostatika -- Zbirka zadataka

190615004
